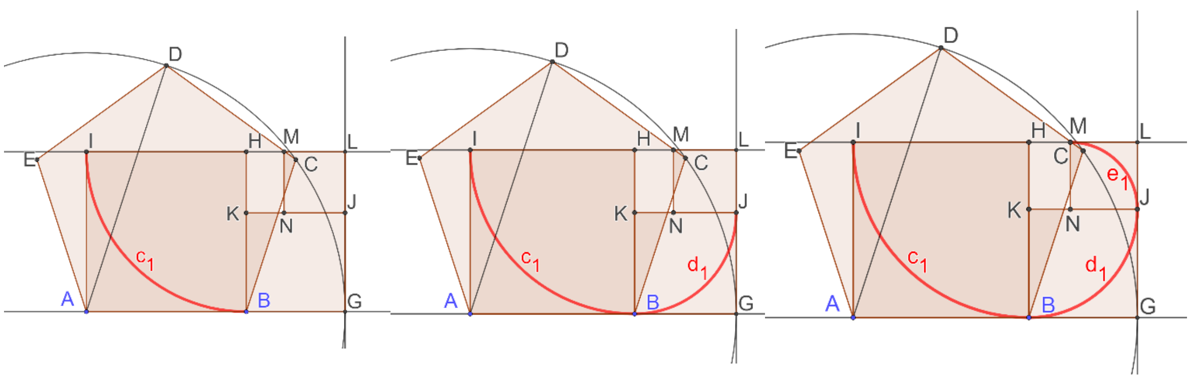
Cuvânt înainte:

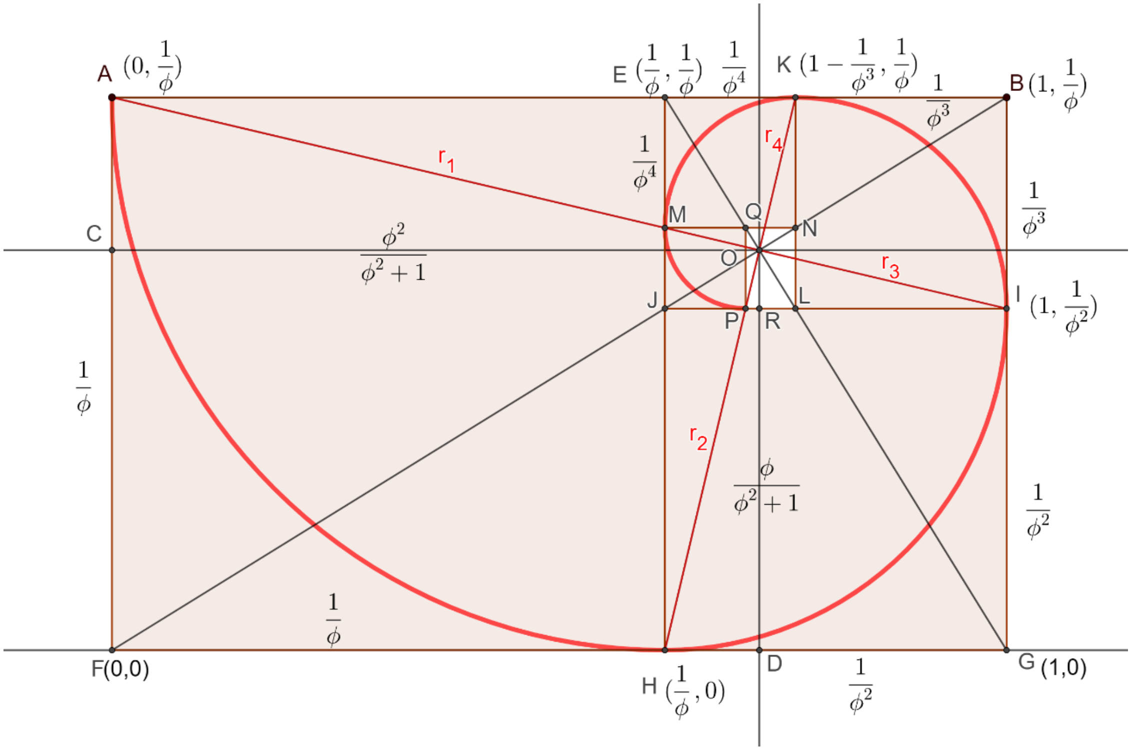
Spira mirabilis -cuvânt magic, cu istorie veche de 500 de ani. Istoria spirei ține de pentagon, numărul 5 și geometria lui Pitagora și **Euclid**, care a găsit raportul armonic $\emptyset$, când a construit pentagonul, apoi cele 5 poliedre regulate. În Renaștere-sec 15-16, Leonardo, Dürer și Pacioli au fost primii care au pus denumirea de raport de aur-*sectio aurea*. Aceasta istorie am dezbătut-o în secțiunile despre pentagon, apoi despre măsuri-numărul de aur $\emptyset$.

Am arătat dreptunghiul de aur și proprietățile lui miraculoase-folosite peste tot în arhitectură, pictură, sculptură și chiar muzică. Pornim de la pentagon, la dreptunghiul de aur, spirala cu cele 3 proprietăți ale ei, ecuația polară și parametrică și ajungem la zborul insectelor și modelarea în spațiu a ecuației polare-pe 3 coordonate. De la numărul 5-pentagonul, se ajunge la numărul de aur, la spirala și ecuația polară-exponențială. Am arătat apoi legătura miraculoasă dintre *3 spire-segmente egale* proiectate pe o axă și numărul de aur. Ecuația lanțului-văzut ca un infinit de zale-segmente egale conține în ecuație cosinus hiperbolic-deci și pe funcția exponențială e^x. Deci am pornit de la pentagon și am ajuns la funcția exponențială. Spirala și lanțul-cosinusul hiperbolic se întrepătrund prin asemănări matematice și geometrice. Ambele se exprima prin ecuații exponențiale, iar spirala are cele 3 proprietăți remarcabile (creșterea razei în progresie geometrică, cu rotație în progresie aritmetică și același unghi dintre raza vectoare și tangenta la spirală în toate punctele).



Să pornim de la pentagon-ABCDE, cu $\frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AB} = \emptyset$ se obține dreptunghiul de aur AGLI, cu pătratul ABHI și dreptunghiul de aur mic BGLH. Se trasează cercul c_1 cu centrul în H și raza HI=HB-primul cerc al spiralei. Se continuă în pătratul mic BGJK cercul d_1 cu centrul în K și raza KB=KJ. Mai departe în pătratul mic NJLM se duce cercul e_1 cu raza NJ=NM și așa mai departe la infinit și rezultă spirala de aur cu proprietățile arătate mai sus și în figura următoare, când se studiază ecuația:

Spira mirabilis-construcție și ecuație



În dreptunghiul de aur ABGF, avem pătratul AEHF și dreptunghiul rămas EHGB. Punctele H și E împart segmentele AB și FG în raportul de aur Ø.

AB=FG=1 FH/HG=Ø=AE/EB deci FH=1/Ø și HG=1/Ø^2

într-adevăr: FH+HG=1 sau 1/Ø+1/Ø^2=1

Se continua împărțirea în același raport Ø a înălțimii GB și rezultă pătratul HGIJ și restul, dreptunghiul IJEB, apoi se repetă procesul și avem pătratul KEMN și restul dreptunghiul NMJL. Mai departe pătratul MJPO și restul, dreptunghiul QPLN.

AI și FB se taie în O, la fel și GE și HK, tot în O. punctul O este centrul spiralei.

Sa calculăm lungimile razelor vectoare OA=r1, OH=r2, OG=r3, OK=r4 și centrul O

AI are panta $-\frac{BI}{AB} = -\frac{\frac{1}{\emptyset^3}}{1} = -\frac{1}{\emptyset^3}$=s taie axa OY în $\frac{1}{\emptyset} = i$ deci ecuația: y=sx+i devine

$$y = -\frac{1}{\emptyset^3}x + \frac{1}{\emptyset}$$

FB are panta $\frac{BG}{FG} = \frac{\frac{1}{\emptyset}}{1} = \frac{1}{\emptyset}$ și taie axa OY în 0 deci ecuația: y=sx+i devine

$y = \frac{1}{\emptyset}x + 0 = \frac{1}{\emptyset}x$ rezolvăm sistemul și avem intersecția lor, punctul O, cu coordonatele

$$O(x,y) = (\frac{\emptyset^2}{\emptyset^2+1}, \frac{\emptyset}{\emptyset^2+1})$$

calculăm $OA^2 = OC^2 + AC^2 = (\frac{\emptyset^2}{\emptyset^2+1})^2 + (\frac{1}{\emptyset} - \frac{\emptyset^2}{\emptyset^2+1})^2 = \frac{2}{\emptyset^2+1}$

$OA = r1 = \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\emptyset^2+1}}}$ este prima rază vectoare

calculăm pe $OH: OH^2 = HD^2 + OD^2 = \frac{2}{\emptyset^2(\emptyset^2+1)}$

$OH = r2 = \frac{1}{\emptyset}\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\emptyset^2+1}}}$ este a 2 a rază vectoare

calculăm pe $OI: OI^2 = OR^2 + IR^2 = \frac{2}{\emptyset^4(\emptyset^2+1)}$

$OI = r3 = \frac{1}{\emptyset^2}\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\emptyset^2+1}}}$ este a 3 a rază vectoare

Repetăm calculul pentru $OK = r4$ și obținem $r4 = \frac{1}{\emptyset^3}\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\emptyset^2+1}}}$

Daca $OA = r$ atunci avem secvența $\frac{r}{\emptyset} / \frac{r}{\emptyset^2} / \frac{r}{\emptyset^3} / \frac{r}{\emptyset^4} / \frac{r}{\emptyset^5} / \frac{r}{\emptyset^6}$

La fiecare rotație cu 90°, raza scade cu factorul ∅ $(\frac{r1}{r2} = \frac{r2}{r3} = \frac{r3}{r4})$

deci ecuația spiralei este: $\boldsymbol{r = \emptyset^{-\frac{t}{\pi}}}$ (stânga)

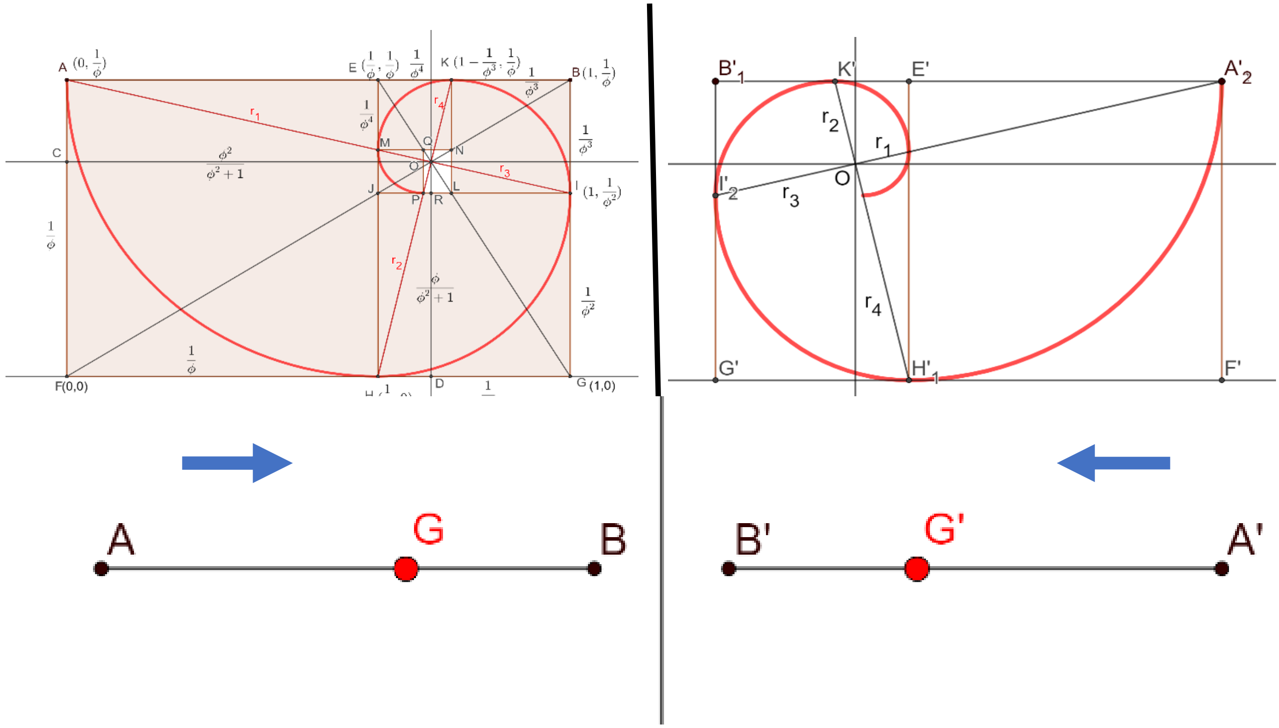
(dreapta):

dacă se rotește în sensul ceasului CW : $\boldsymbol{r = \emptyset^{\frac{t}{\pi}}}$, t este unghiul în radiani

deci am obținut o spirala cu urmatoarea unică proprietate:

unghiul de rotație creste cu o rație constanta-**aritmetic**: 0,90,270,360…grade și raza crește în progresie **geometrică** : $\emptyset$, $\emptyset^2, \emptyset^3, \emptyset^4, \emptyset^5$

mai jos sunt cele 2 spirale simetrice față de de axa verticala, prima CCW-trigonometric și a doua CW-sensul orar .



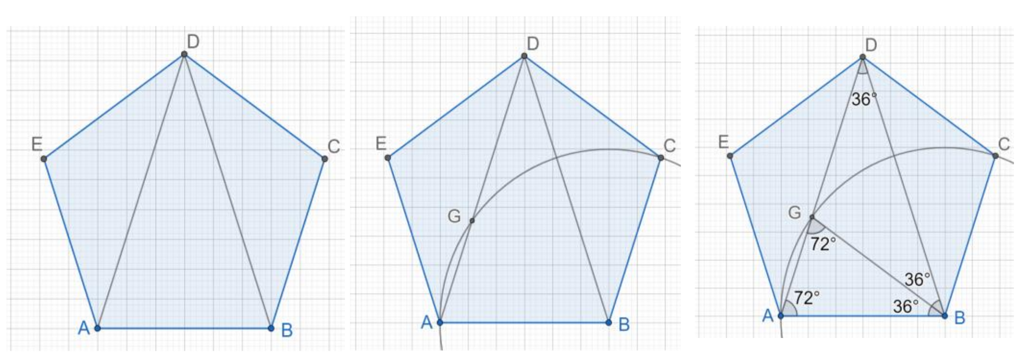
G și **G´** sunt punctele de aur pentru segmentul AB, respectiv **B´**, **A´**

dacă parcurgem distanța de la A la B, avem spirala din stânga CCW

dacă parcurgem distanța de la **A´** la **B´**, avem spirala din dreapta CW

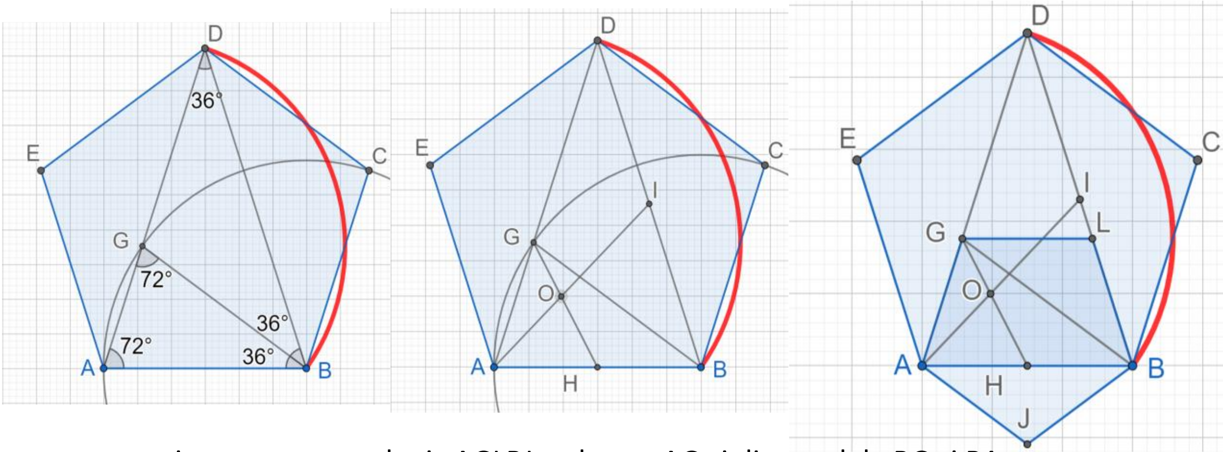
altă construcție a spiralei

se pornește de la proprietatea pentagonului regulat ABCDE

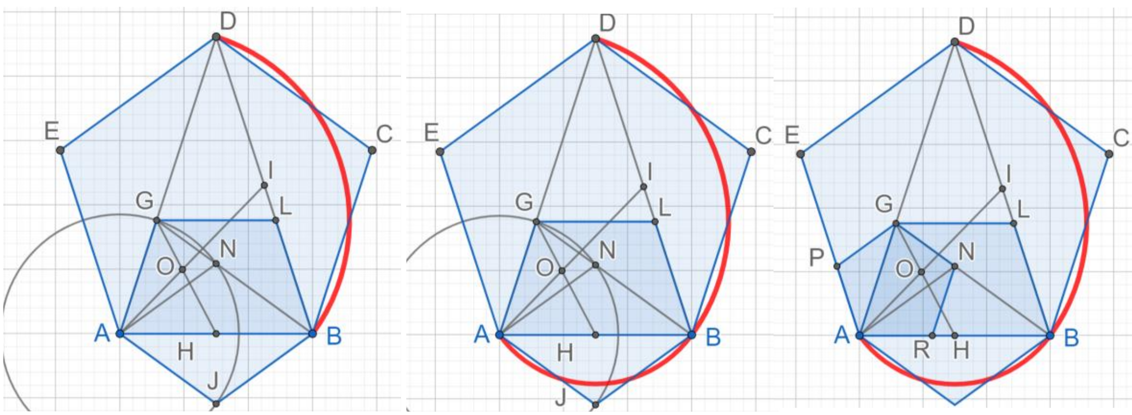


Pornește cercul cu centrul în B taie pe AD în G și avem din nou triunghiurile isoscele DAB și BAG. G taie pe AD în raportul de aur-la fel și AD/AB și BD/AB sunt tot în raport de aur Ø

cercul cu centrul în G și raza GD=GB formează arcul spiralei DB medianele GH și AI în triunghiurile BAG și DAB se taie în centrul spiralei O



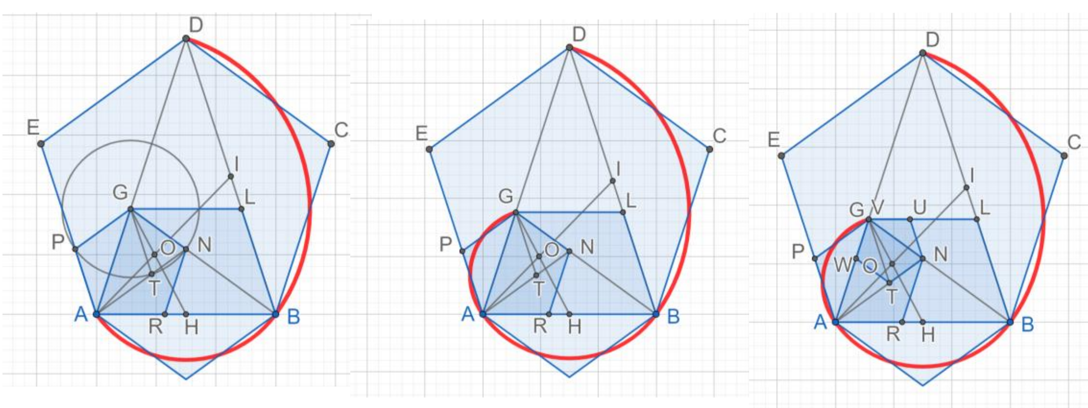
se construiește pentagonul mic AGLBJ cu latura AG și diagonalele BG și BA



cu centrul în A și raza AG se duce cercul care taie pe BG în N

cu centrul în N și raza NA=NB se duce cercul cu arcul spiralei AB

se construiește pentagonul mic NGPAR cu latura AG și diagonalele BG și BA

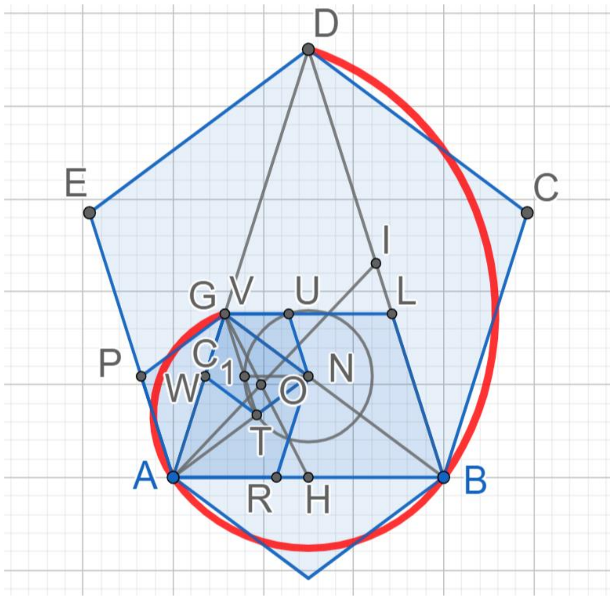


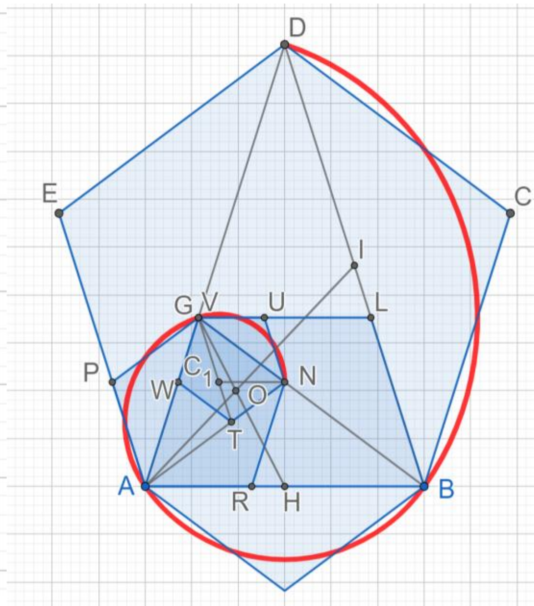
cu centrul în G și raza GN se duce cercul care taie pe AN în T

N și T împart segmentele BG și AN în raportul de aur Ø

cu centrul în T și raza TA=TG se duce cercul cu arcul spiralei AG

se construiește pentagonul mic NTWGU cu latura NT și diagonalele TV și VN





cu centrul în N și raza NU se duce cercul care taie pe GT în C1

(C1 împarte pe GT în raportul de aur Ø)

cu centrul în C1 și raza C1G= C1N se duce cercul cu arcul spiralei GN

proprietățile spiralei simetrice, care creste în sensul CW

centrul O și razele vectoare OG, OA, OB, OD

spiralei $\frac{O\,D}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OG} = \frac{OG}{ON}$

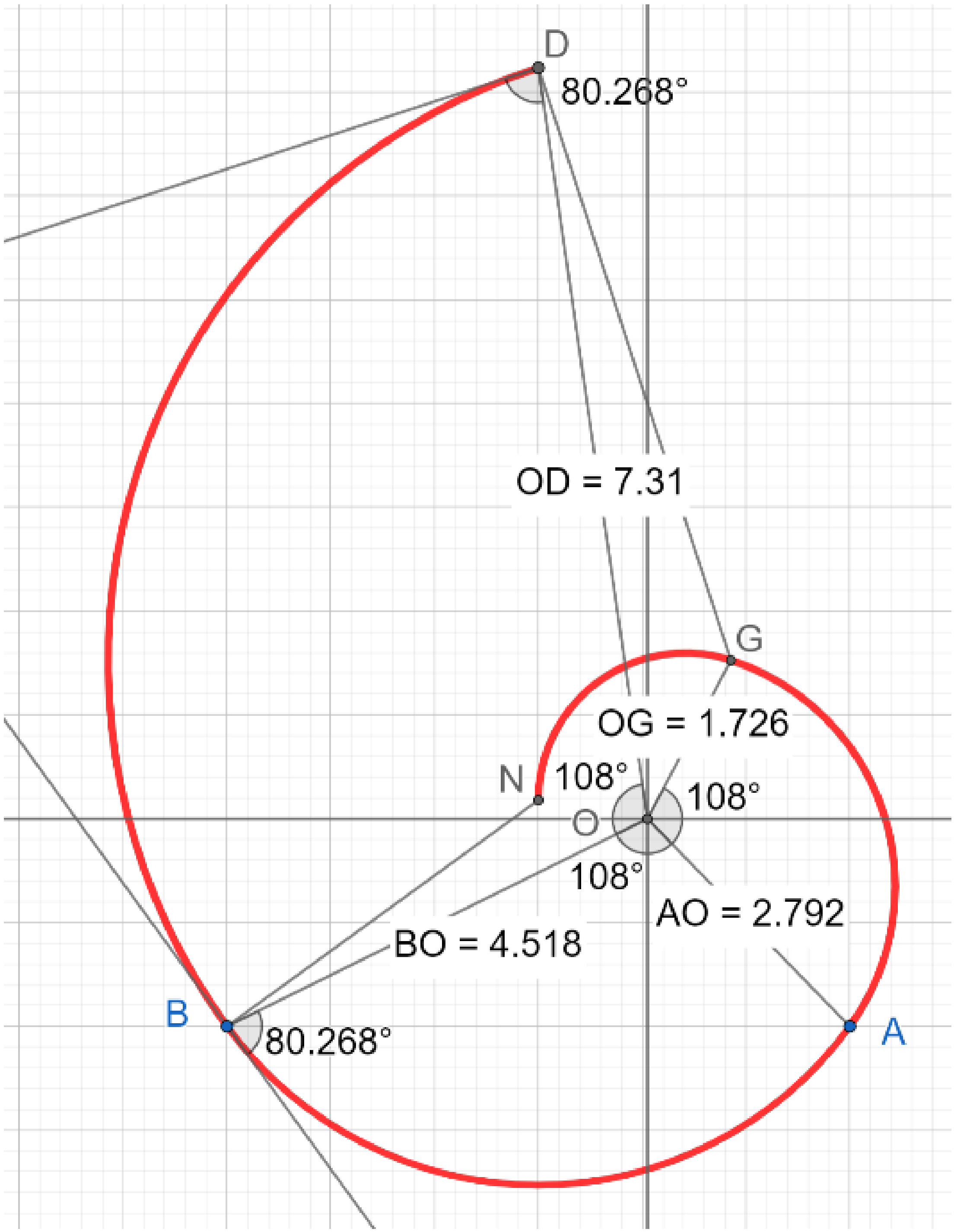
sau $\frac{7{,}31}{4{,}518} = \frac{4{,}518}{2{,}792} = \frac{2{,}792}{1{,}726} = 1{,}618 = Ø$

unghiul dintre 2 raze vectoare este 108 grade deci

rația progresiei aritmetice cu care se rotește raza este 108 grade

rația progresiei geometrice cu care creste raza este 1,618=Ø

unghiul făcut de tangenta la spirală cu raza vectoare este constant 80,2 grade


D
80.268°
OD = 7.31
G
OG = 1.726
N
108°
108°
O
108°
AO = 2.792
BO = 4.518
B
80.268°
A

Comparație între cele 2 spirale:

Prima obținută cu dreptunghiul de aur DPIR1 (culoarea roșie)-centrul O

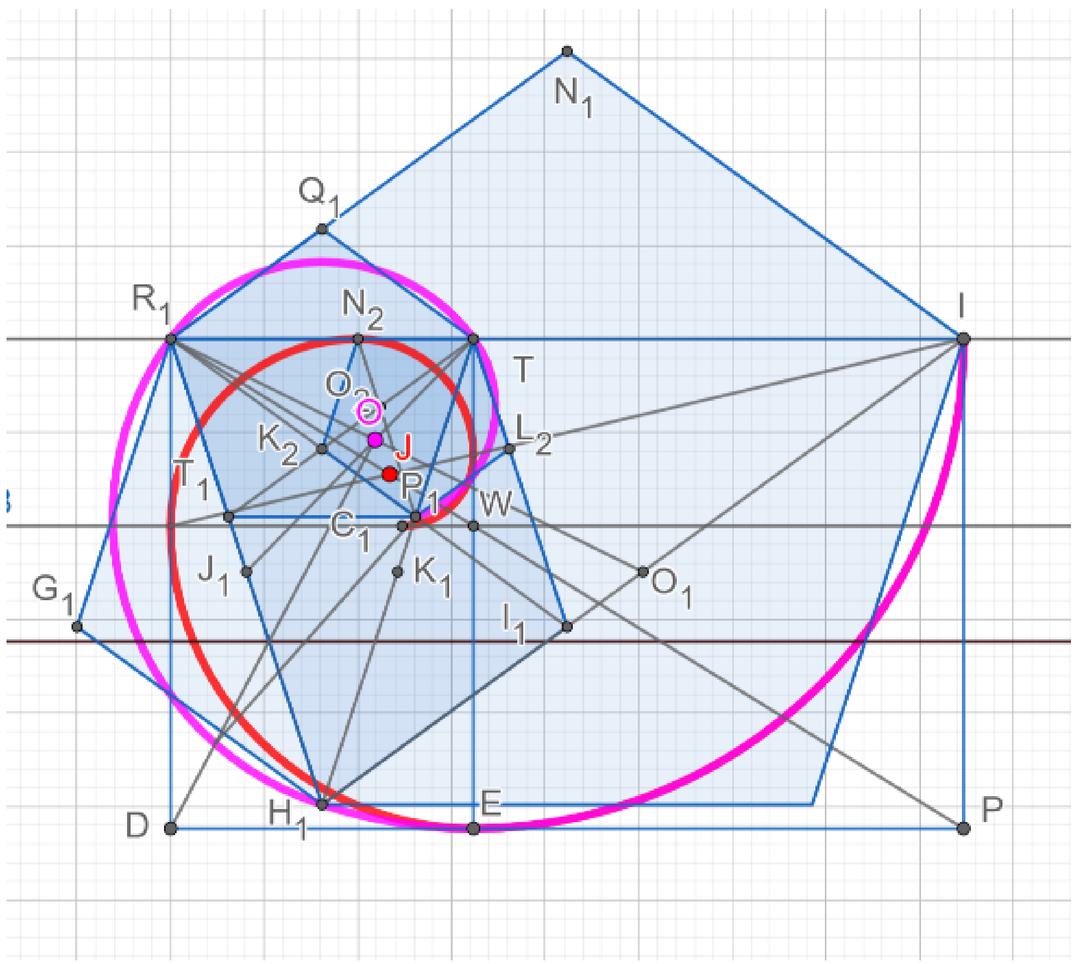
-raza creste în rație $\emptyset -$ progresie geometrică

-raza se rotește cu rația 90 grade-progresie aritmetică

A doua obținută din pentagonul ABCDE-construcția anterioara (culoarea roz)-centrul J

-raza creste în rație $\emptyset -$ progresie geometrica

-raza se rotește cu rația 108 grade-progresie aritmetica



Comparație: se observă pentagoanele de construcție -raza EI este comuna, apoi cea pentagonala se extinde mai mult revenind cam în același punct P1.

La spirala pentagonala arătam ca

raportul a 2 raze vectoare consecutive este $\emptyset$.

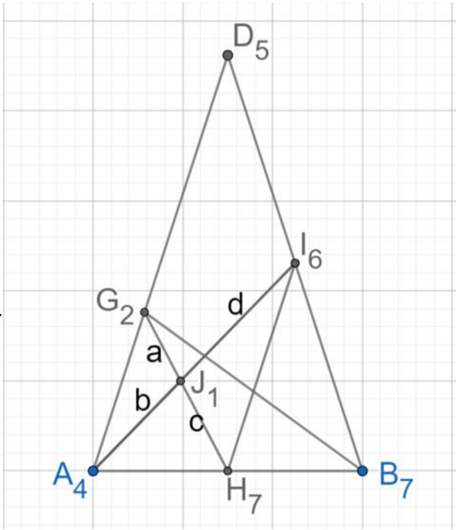
în figura de mai sus triunghiurile isoscele

DAB și BGA (la noi D5A4B7 și B7G2A4)

A4I6 și G2H7 sunt mediane și se taie în centrul J1

J1G2 și J1A4 sunt 2 raze consecutive

sa calculam $\frac{J1A4}{J1G2} = \frac{a}{b}$



în triunghiurile asemenea isoscele raportul de asemănare este $\emptyset = \frac{\boldsymbol{A4D5}}{\boldsymbol{A4D7}}$

deci raportul medianelor A4I6/G2H7 va fi tot $\emptyset$

$\Delta J1G2A4 \sim \Delta J1I6H7 \quad \frac{J1G2}{J1A4} = \frac{J1H7}{J1I6} sau\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \frac{a}{c+a}=\frac{b}{d+b}$

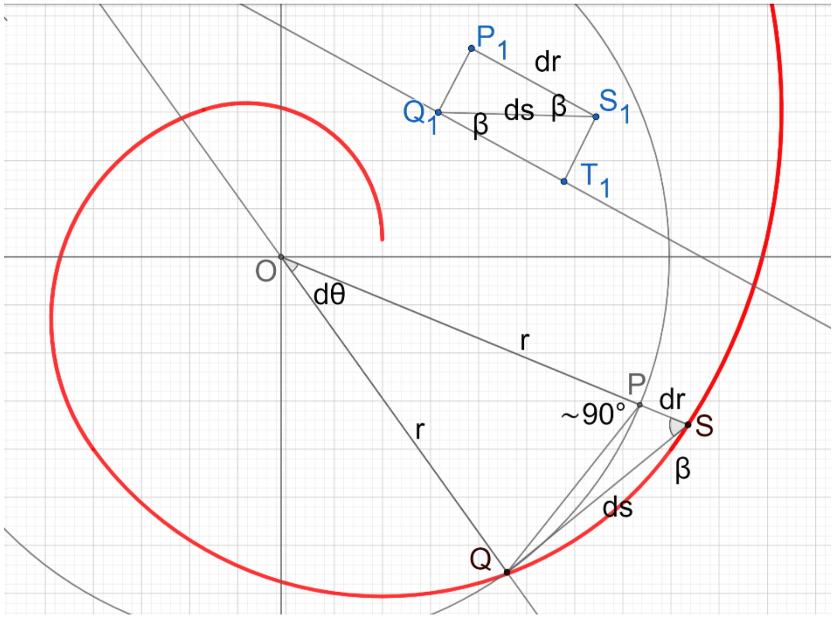
$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{\mathrm{A4I6}}{\mathrm{G2H7}} = \frac{m}{M}=\emptyset$

Ecuația spiralei

Încercările de găsire ale ecuației prin metode geometrice este fascinanta dar nu ajunge la rezultatul așteptat, ca sa redea proprietățile minunate ale spiralei. Faptul ca se rotește și creste exponențial nu rezulta din ecuația precedenta găsită prin calcule geometrice.

De-a lungul timpului, odată cu descoperirea calculului diferențial-după sec. 17, matematicienii au folosit noi metode de calcul și studiu al funcțiilor. Derivata și integrala, descoperite de Newton și Leibniz, au adus noi soluții, mijloace de cercetare, mai eficiente, mai rapide și care au dat răspuns la eforturile celor din trecut. Lungimile și ariile și chiar volumele erau greu de rezolvat prin metode geometrice și algebrice.

Ecuația spiralei a fost descoperita de Descartes, care a preluat progresele făcute de contemporanii săi, amintiți mai sus. Vom povesti mai târziu mai pe larg istoria acestei celebre descoperiri.



Presupunem că avem spirala care se rotește de la Q la S, cu dθ și creste de la OQ la OS cu ds. La limită, când ds și dθ tind către 0, razele OS și OQ sunt paralele și avem figura de mai sus cu razele P1S1 și Q1T1 tăiate de secanta Q1S1

Arcul QP se poate asemăna cu coarda QP și devine perpendiculară pe raza OS

QS=ds-creșterea pe lungimea spiralei

PS=dr-creșterea razei radial la limita: PQ=arc PQ=rdθ

ΔOPQ : tgβ=$\frac{PQ}{PS} = \frac{rd\theta}{dr}$

$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\mathrm{tg}\beta}$ $\frac{dr}{r} = d\theta ctg\beta$

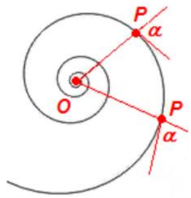
aplicam integrala $\int \frac{dr}{r} = \int d\,\theta ctg\beta$

ln(r)=$\theta ctg\beta$ (s-a folosit $\int \frac{dr}{r} = \ln(r)$ pentru că $\frac{d\ln(r)}{dr}$=$\frac{1}{r}$ și $\int d\,\theta = \theta$)

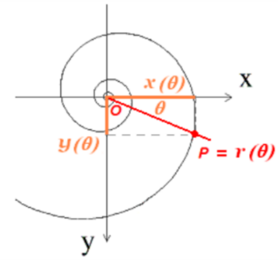
r=ce$^{\theta ctg\beta}$

aceasta este ecuația spiralei logaritmice în coordonate polare

β-este unghiul constant făcut de tangenta la curba și raza vectoare



$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$



β-este unghiul constant făcut de tangenta la curba și raza vectoare

forma parametrica a ecuației rezulta din proiecția razei-a punctului P pe cele 2 axe:

$x(t)=ae^{bt}\cos(t)$ a este raza de pornire pentru t=0

$y(t)=ae^{bt}\sin(t)$ b=ctgα-(α unghiul constant dintre raza și tangenta la curbă)

diagrama arată spirale diferite când **a**-rația progresiei geometrice, se schimbă

a=1,2,3,4,5 şi α=20° deci b=ctg(20°) curbele se dilata proporțional cu a

Să reluam puțin istoria și pașii care au dus la aceasta ecuație remarcabilă:

am pornit de la dreptunghiul de aur, definit de proporția lungime/înălțime=Ø

În dreptunghi, se formează pătrate și restul tot dreptunghiuri, care respecta aceeași regula. Șirul merge la infinit și astfel înscriind în fiecare pătrat câte un cerc se ajunge la spira mirabilis cu cele 2 proprietăți remarcabile.(unghiul de incidență era 73°)

În cazul pentagonului de pornire, se începe pe una din laturi și se construiește triunghiul magic cu unghiurile de 36° și 72°, se duc diagonalele și avem același raport Ø între diagonala și latura și urmează arcele ce trec prin vârfurile triunghiurilor isoscele și așa mai departe se ajunge la metoda a 2 a, la aceeași *spira mirabilis* cu rația Ø , dar unghiul de incidență 80°

Rotație uniforma-medie aritmetica, creșterea razei exponențială-progresie geometrica și același unghi de incidență definesc următoarele legi:

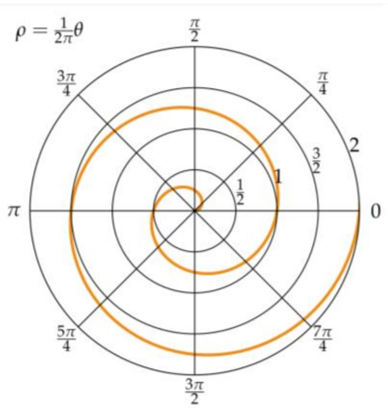
la fiecare creștere uniforma a rotație a razei $d\theta$, avem o creștere a razei dr

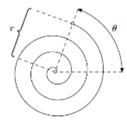
deci $\frac{dr}{r} = d\theta ctg\beta$

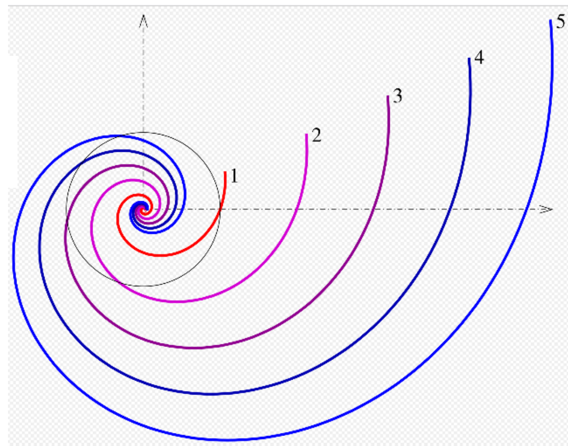
cum s-a ajuns la aceste ecuații?

Rotația sub același unghi de incidenta și creșterea exponențială a razei sunt 2 proprietăți remarcabile, unice în clasa curbelor și spiralelor din matematica.

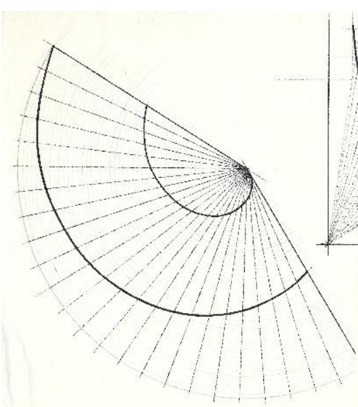
Mai există și **spirala lui Arhimede** (mai jos)

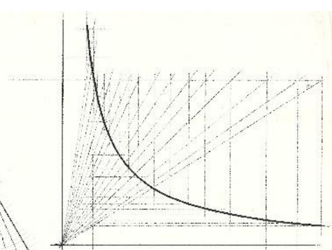


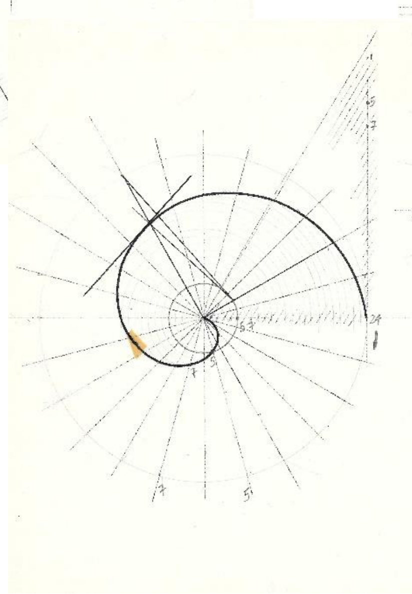


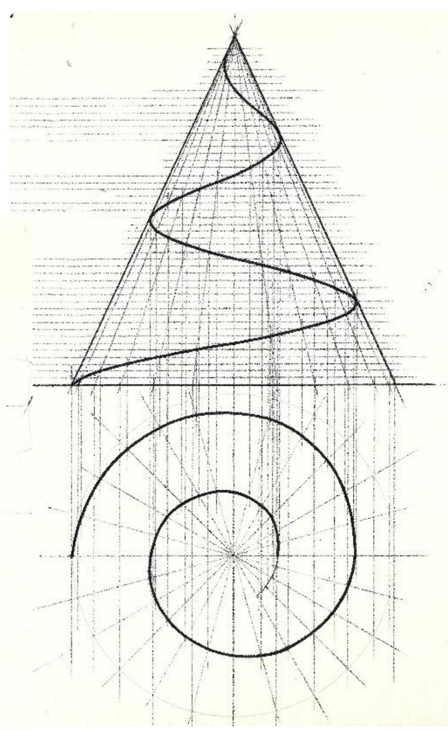


la Arhimede (mai sus), raza se rotește uniform, dar creste constant. Se vede în grafic, pe axa orizontală creșteri constante 0, 1/2, 1, 3/2, 2... la spira mirabilis, creșterea razei este în progresie geometrica-exponențială de forma **r=c**$\boldsymbol{e^{\theta ctg\beta}}$ (sus dreapta)









(Fig.1)

Construcția spiralei

A fost descoperita de Conon din Samos iar proprietățile ei descoperite de Arhimede.

Se poate construi cu rigla și compasul împărțind un cerc în părți egale-raza și tot cercul-în 24 de părți (24 de diviziuni pe vertical, care divid raza în 24 părți egale și 24 de sectoare egale determinate de cele 24 de raze vectoare radiale defazate la 15 grade)

Pentru punctele 5 și 7

Se duce cercul cu raza r/5

Cercul r5 taie raza vectoare rv5 în 5

Se duce cercul cu raza r/7

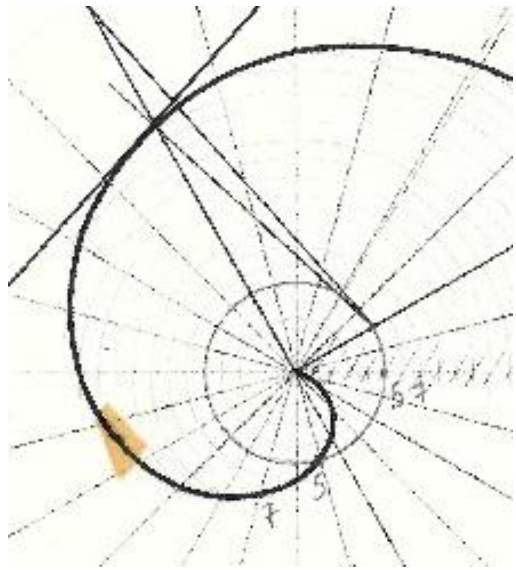
Cercul r7 taie raza vectoare rv7 în 7

Se unesc punctele 5 și 7

La fel se face pentru toate cele 24 de puncte

Pe con se face o construcție asemanatoare

Se împarte cercul în 24 părți egale-15°



Se împarte înălțimea conului și generatoarea în 24 parti egale

Se duc din fiecare diviziune-de pe generatoare verticale care taie razele cercului de baza în punctele de pe spirala. Repetam construcția ca cea de mai sus și se unesc punctele.

În Fig.1 (sus) s-a împărțit sectorul în 24 părți egale; la fel și raza. Se repeta la fel construcția: fiecare raza vectoare rvX-radiala taie cercul corespunzător cu raza rX

Alte spirale:

Theodorus (sec 5-BC)

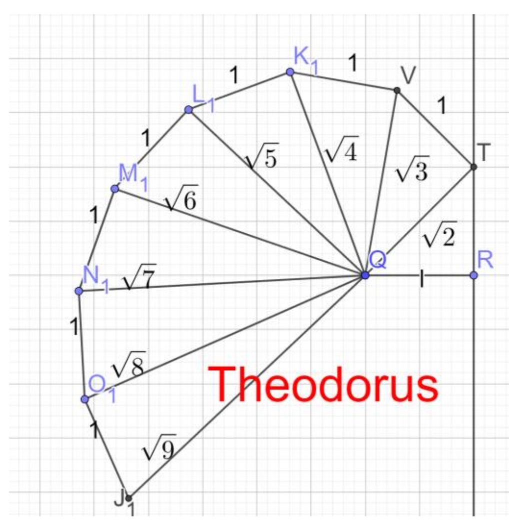
Pe cercul de raza QR=1 se duc triunghiuri

dreptunghice cu catetele RT=TV=1

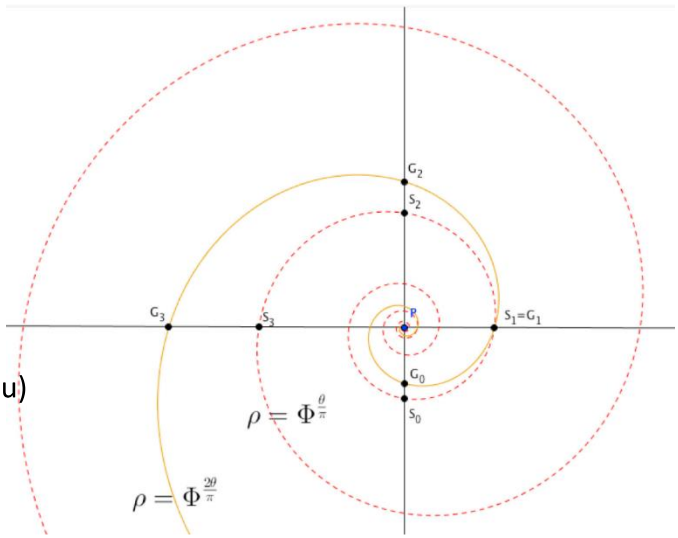
se obțin ipotenuzele $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$

unind vârfurile se obține o spirala

asemănătoare cu ce a lui Arhimede



Alte spirale-logaritmice:



Spira solaris

$$r = e^{\theta(ln\emptyset)\frac{2}{\pi}} = \emptyset^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

are creșterea $\emptyset^2$ (roșu punctat)

comparație cu **spirala de aur** (continuu)

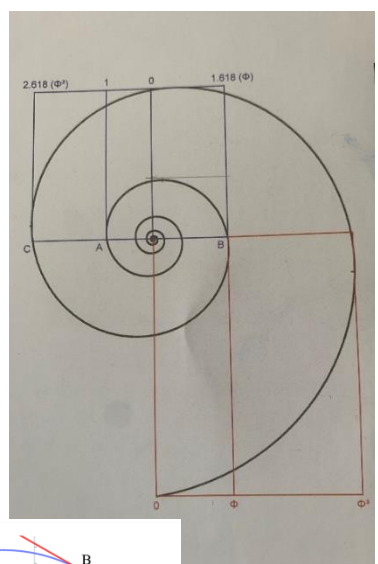
$$r = e^{\theta(ln\emptyset)\frac{1}{\pi}} = \emptyset^{\frac{\theta}{\pi}}$$

are creșterea $\emptyset$

se pot obține spirale diferite, modificând creșterea- rația progresiei geometrice

astfel pentru rația $\sqrt{\emptyset}$ obținem alta spirala-pheidia

nu toate spiralele logaritmice sunt de aur, dar toate spiralele de aur sunt logaritmice-au creșterea $\emptyset$ la fiecare rotație de 90°.



Pot fi și spirale cu creșterea razei $\emptyset$ la fiecare 180°.

Se vede creșterea cu rația $\sqrt{\emptyset}$ pe orizontala

OA=1 AB=1,618 și AC=2,618=$\emptyset^2$

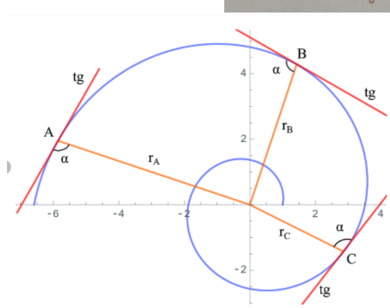
Proprietate remarcabilă

Unghiul făcut de rază cu tangenta este același

Știm ecuația: $\mathbf{r=ce^{\theta ctg\beta}} = \mathbf{ce^{b\theta}}$ ctgβ=b

derivăm : $$\frac{dr}{d\theta} = cbe^{b\theta} = br$$

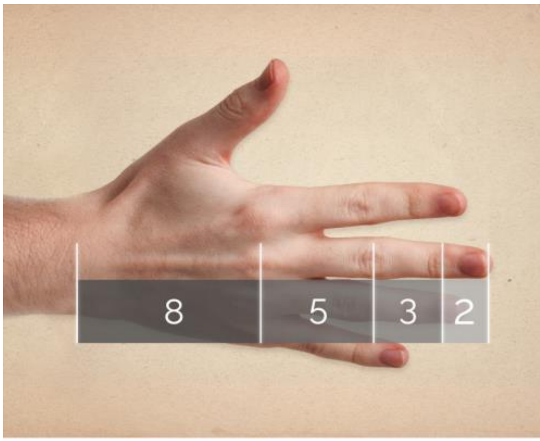
În derivată nu apare $\boldsymbol{\theta}$ deci $\boldsymbol{\beta}$ este constant

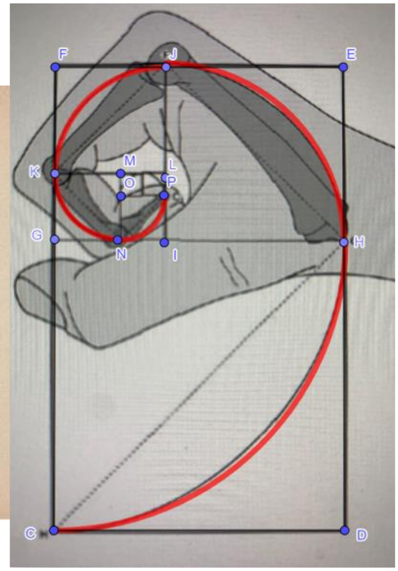


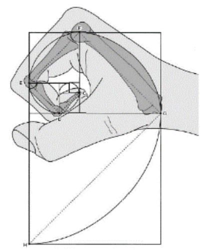
În figură $\boldsymbol{\beta = \alpha}$

Interpretarea spirituală

Având în vedere aceste proprietăți remarcabile, unice, aceasta spirală a uimit lumea academică din vechime. Se pare ca ecuația ei a fost descoperită de René Descartes, apoi a fost dezvoltata de Jakob Bernoulli (1654-1705), care și-a pus-o pe mormânt.







Construcția ei a început de la logos-ul proporție Ø găsit la pentagon, apoi am continuat studiul infinitezimal, când la limita razele vectoare devin paralele (r și r+dr-respectiv OQ și OS în graficul spiralei arătat mai sus)

Spira vine din latină, după traducerea lui Ieronim, Latina Vulgata în anul 385. De atunci, mai toți învățații - catolici au folosit Vulgata. În latină, *spira* apare pentru prima data în Gen. 2,8 prin cuvântul **spiraculum vitae**, adică suflare de viață: ...*Domnul i-a suflat* ***suflare de viață***.

În Ioan 3,6 Domnul îi spune lui Nicodim:...*ce este născut din Duh este duh,* sau:

et quad natum est ex spiritu, spiritu est. Spirit și spiriculum, conduc la *spira* adică *spirala*. O spiră este ca un abur, ca un vârtej, ca o suflare, care vine din rotație și creștere. Faptul că spira mirabilis se rotește și creste, are un adânc aspect spiritual și nu este întâmplător ca raportul-*logosul* de aur se ascunde în construcția și ecuația ei.

Am spus mai devreme cuvintele rotație și creștere, apoi rotație uniformă-media aritmetica și creștere progresivă-exponențială. Acest concept este profund ancorat în ceea ce Cuvântul Sfânt definește viața creștină normală. Viața este ca o roată care se rotește, dar raza ei crește mereu, mereu, clipă de clipă. Mă rotesc și cresc, este conceptul vieții creștine definit în Evanghelie. Noi, ca și mădulare în Trupul Domnului, trebuie sa creștem mereu, armonic,

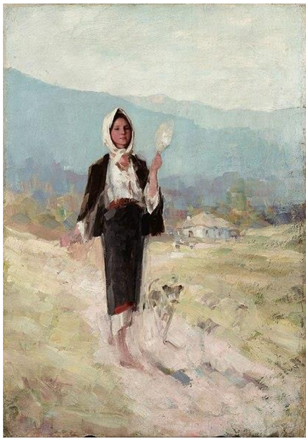
adică în toate privințele, proporțional. Un mădular mic, degetul mic de la picior, creste armonic, proporțional cu piciorul, cu mâna sau cu oasele craniului. Am văzut deja o parte din proporțiile, care definesc rapoartele armonice dintre oasele mâinii, locația ochilor, a nasului, a gurii și a urechii.
În Noul Testament, avem o imagine clară a vieții omului, ca o roată, care se rotește Iacov 3,6: *Limba este ca un foc...care aprinde roata vieții*-în grecește **ton trohon geneseos,** adică roata-cursul originii, a cursului vieții.
Mergem prin Biblie, cu imaginea vieții văzută ca o roată:
Ieremia 18,3: *Când m-am pogorât în casa olarului, iată ca el lucra la roată* (original **oben**).
Domnul era Olarul și modela prin rotația roții, vase din lut, care suntem noi oamenii. Noi suntem creați din suflarea divină-*spiraculum vitae*, din Gen. 2,8, tot din lut-țărână, peste care Domnul a suflat suflarea-spirala divină, care este Duhul și care a dat naștere la duhul omului. Conceptele spira, vârtej, abur, duh și suflare sunt similare și apar și la noi, prin cercuri, ca roata vieții și spirale, care cresc exponențial.

Eclesiastul 12,6: *Adu-ți aminte de Făcătorul tău, până nu se rupe **funia de argint**, până nu se sfarmă **vasul de aur**, până nu se sparge **găleata** la izvor, până nu se strică **roata(galgal) de la fântână**.*
Și aici apar imaginile similare, roata de fântână, vasul de aur-pe care l-am văzut și la roata Olarului, găleata la izvor, care este tot un vas care cară apa. Toate aduc la cerc și rotație și mai ales firul de argint, ne duce gândul la firul de pe fuiorul țesătorilor de la noi. Fuiorul care toarce și se rotește, se termină, este ca și viața noastră naturală-fizică, care, ca o spirala inversă, descrește se micșorează și eventual se sfârșește, dar cealaltă viața-spirituală creste exponențial, așa cum vom vedea mai departe.

Ezechiel 10,10: *După înfățișare, toate cele 4 roți aveau același chip-fiecare roată (ofan), părea că este în mijlocul altei roți*. Vedem cum roata(galgal-ofan) are chip și era una în alta și la urmă, toate roțile făceau același lucru Fiecare mergea drept înainte (versetul 22). Vedem și aici ascuns același gând de rotație și creștere înspre înaintare, adică creștere cu un scop, cu o direcție, o creștere după voia Domnului. Roata în roată, ne duce la construcția geometrică a spiralei prezentată la început, când cercurile derivate din pentagon-sau înscrise în pătrat, se măresc sau se micșorează, în funcție de sensul de rotație CW-sens orar sau CCW-opus.

Isaia 5,28: ***Săgețile** lor sunt ascuțite, și toate **arcurile** sunt încordate-copitele cailor lor parcă sunt de cremene și **roțile** (galal) carelor lor parcă sunt un **vârtej*** (sufe).
Aici sunt din nou imagini simbolice, arcuri (la fel ca arcurile de construcție a spiralei, care sunt tangente la laturile dreptunghiului de aur). Săgețile sunt razele vectoare, care cresc exponențial, roțile-*galal* și vârtejul -*sufe* aduc din nou aceeași imagine a spirei mirabilis.

Iov 7.6-7: *Zilele mele zboară mai iuți decât suveica țesătorului, se duc și numai am nicio nădejde! Adu-Ți aminte, Dumnezeule, ca viața mea este doar o suflare!*




Am găsit textul lui Iov, care arata viața omului, întâi ca o suveică, apoi ca o suflare.


Grigorescu, cu 3 picturi, apoi Ipolit Strâmbu (a 4 a) arată țărănci care țes și trec ața din fuior pe mosor (detaliul mărit). Suveica are un mosor cu ață și *zboară* de la un capăt la altul, în timp ce mosorul ei cu ață se rotește și se micșorează.

Eminescu în celebra poezie *Viața*, arata o fată care țese:

Colo, lângă lampa, într-un mic iatac
Vezi o fata care pune ața-n ac
Fața ei e slaba de-o paloare cruda
Ochii ei sunt tulburi , pleoapele asuda
Degetele repezi poarta acul fin
Ea își coase ochii într-un tort de în

Viața văzută ca o suveica care pune ață, sau mosorul care se rotește și se micșorează, căci pune ața-n ac, sunt la fel ca spirala care se rotește și creste, sau invers, scade și ajunge un punct, ca în vârtejul lui Ilie. Pictorii și chiar Eminescu a avut sclipiri de geniu și au creat imagini sublime, cu suveica și mosorul care deapănă ața, sau zilele omului, ca în textul lui Iov. Viața lui Eminescu rămâne ca și suveica lui Grigorescu-moartă pe pânză sau pe hârtie, sunt roase de vreme și dispar cu timpul. Viața adevărată, care creste odată cu nașterea din nou, este ca *spira mirabilis*, ca vârtejul care dă viață, crește mereu, mereu și ajunge la plinătatea desăvârșirii, care este asemenea cu Domnul nostru.

Ilie a fost răpit *la cer într-un vârtej de vânt* 2 Împ.2,10-se folosește cuvântul *sahar* (de aici vine deșertul Sahara). Aceste furtuni-vârtejuri de vânt sunt și azi-în America se numesc tornado, și fac același lucru: răpesc și ridică la cer case și mașini și distrug tot ce întâlnesc.

Din nou în Noul Testament:

Ef. 4,14-15: *să nu mai fim copii, plutind încoace și încolo, purtați de orice vânt de învățătură...ci credincioși adevărului, în dragoste sa creștem în toate privințele, ca sa ajungem la Cel ce este Capul, Hristos*

Vedem din nou dorința Domnului, ca sa nu mai fim copii. O viață plată, plafonată, care nu crește, este ca un cerc, care deși se rotește, nu crește, raza lui este constantă. Ba, mai mult am văzut la spirala lui Arhimede, ca raza crește constant la fiecare rotație. Domnul vrea ca noi sa creștem exponențial, ca să ajungem la asemănarea cu Capul-Hristos.

Versetul 16: *din El tot trupul bine închegat și strâns legat, prin ceia ce dă fiecare încheietură, își primește creșterea, potrivit cu lucrarea fiecărei părți, în măsura ei și se zidește în dragoste.*

O alta imagine simbolica a creșterii armonice, a fiecărei încheieturi, care respectă proporțiile-rația și unghiul de creștere (dintre tangenta și raza vectoare).

1 Cor. 12,12-27 cu titlul Mădularele Trupului:

Am vorbit mai sus despre logosul-proporție, care definește creșterea armonica a mădularelor și creșterea spiralei. Iată din nou acest concept. Armonia dintre mădulare, care cresc armonic-vers. 14: *astfel trupul nu mai este un singur mădular, ci mai multe*. Vers.11: *când eram copil, gândeam ca un copil, când m-am făcut om mare, am lepădat ce era copilăresc*.

Observăm că o creștere normală începe de la stadiul de copil, hrănit cu laptele Cuvântului de început. 1 Cor.3,2: v-am hrănit cu lapte, nu cu băuturi tari, caci nu le puteați suferi...

Evrei 5,12: *voi....aveți nevoie ca cineva sa va învețe cele dintâi adevăruri ale Cuvintelor lui Dumnezeu, și ați ajuns sa aveți nevoie de lapte, nu de hrana tare.* Creșterea normală în trup merge crescând, armonios exponențială. Iată cum descrie profetul Isaia aceasta stare fericită: Is.40.29-31: *Și El dă tărie celui obosit și mărește puterea celui ce cade în leșin -flăcăii obosesc și ostenesc, chiar tinerii se clatină dar cei ce se încred în Domnul își înnoiesc puterea, ei zboară ca vulturii, aleargă și nu obosesc, umblă și nu ostenesc*.

Același gând și la David în Ps. 84.7: *Ei merg* ***din putere în putere*** *și se înfățișează înaintea lui Dumnezeu în Sion.*

La fel Solomon, în Prov.4,18: *Cărarea celor neprihăniți este ca lumina strălucitoare, a cărei strălucire* ***merge mereu, mereu crescând*** *până la miezul zilei.*

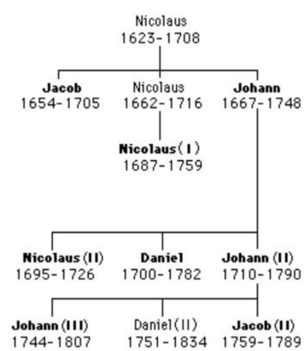
Schimbarea din putere în putere, mereu, mereu și din slavă în slavă, apare și în 2 Cor. 3,18: *noi toți privim cu fața descoperită ca într-o oglindă slava Domnului și suntem schimbați în același chip al Lui, din slavă în slavă, prin Duhul Domnului.*

Conceptul de creștere armonioasă este semnul unei vieți normale pe calea Domnului. Dacă nu creștem, este un semn, că nașterea noastră din nou n-a avut loc, și rămânem pitici-caricaturi, care nu corespund cu ce scrie în Evanghelie. Mirele-Domnul așteaptă de la noi, mireasa Lui, să fim frumoși, crescuți armonios *ca să înfățișeze înaintea Lui această Biserică slăvită, fără pată, fără zbârcitură, sau altceva de felul acesta, ci sfântă și fără prihană*. (Ef.5.27)

Creșterea din mărire în mărire, ne arată o statură mai deplină, mai asemănătoare cu Domnul, pe măsură ce ne rotim pe roata vieții și ne apropiem de întâlnirea cu El. Eclesiastul 7,8: *Mai bun este sfârșitul unui lucru decât începutul lui*. Faptul că stau pe loc este un semnal de alarmă, o pricină de cercetare, dacă sunt sau nu pe cale acea bună, daca L-am primit sau nu pe Domnul ca Mântuitor al vieții mele. Handicapați, sau șomeri în viața creștinilor nu există, așa cum ne spunea și Nicolae Moldoveanu în discuțiile de acum 30 de ani la adunarea din casa dânsului-Sibiu.

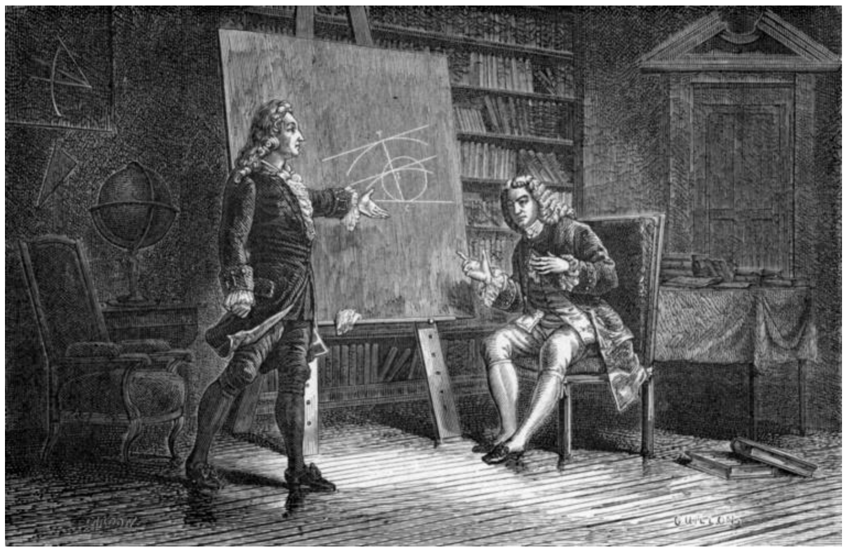
Am trecut prin Cuvânt, am luat povețe și semne și am scos câteva gânduri îndrăznețe asupra vieții de credință, pe care am asemănat-o cu o roată care se rotește și creste.

Asemănarea spirei mirabilis cu creșterea armonică a vieții omului, a fost observată și de **Jakob** Bernoulli, care studiindu-i aspectul și proprietățile a numit-o *mirabila*-adică minunată. A fost atât de încântat de forma și ecuația ei, încât a dorit sa i se cioplească pe mormânt și s-o ia cu el în veșnicie! Din greșeală, soția lui a ales spirala lui Arhimede, care crește constant.



Jakob Bernoulli a fost primul din familia celebră, care a dat într-un secol 8 mari matematicieni și oameni de știință. Ei, alături de Newton, Leibniz și Euler au dominat lumea științifică a Europei pe întinsul unui secol și jumătate. Tatăl sau Nicholas Bernoulli, dorea ca fii săi să urmeze cariera teologică și sa slujească Domnului. Deși au studiat teologia filosofia și medicina cei 2 frați Jakob și Johann au ales matematica și au făcut descoperiri uimitoare în fizică, astronomie, optică, teoria fluidelor, legile gazelor, termodinamică. Ei au descoperit soluții la ecuații diferențiale cu separare de variabile, au calculat ecuația lanțului- catenaris, au calculat numărul e ca limita șirului , pornind de la dobânda lunară și pe fiecare zi a unui împrumut la banca.

Jakob și Johann



Jakob a fost uimit de frumusețea spiralei și și-a dorit-o pe mormânt. El a dorit sa-i scrie lingă spirala și celebrul dicton: **Eadem mutata resurgo** *,* care înseamnă Schimbat (mutata) și înviez (resurgo) la fel (eadem). A dorit ca în 3 cuvinte să descrie funcția spiralei și să se compare cu viața lui! Într-adevăr, *spira mirabilis* creste rotindu-se și rămâne la fel.

Cuvintele lui Jakob sunt confuze, la prima vedere-totuși au un mare adevăr. Dacă plecăm la Domnul, prin credința în jertfa Lui, într-adevăr, vom învia odată cu cei plecați la El, înaintea noastră, la Răpire (1 Cor,15,51). Dacă vom învia în trupuri de slavă, nu înseamnă că vom fi la fel, caci vom fi schimbați. (1 Tes4,16-17). Oricum ar fi, ridicarea noastră, după mormânt, sau la Răpire, ne va face făpturi noi, cu trupuri de slavă, deci nu vom mai fi la fel. Oricum, credința în înviere este remarcabilă și valoroasă, asta ne da speranța în viața viitoare, care se continua în veșnicie.

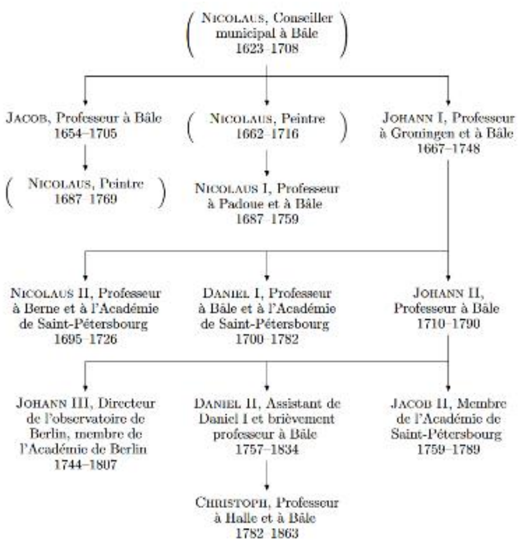
Iată textul pus de soția sa Judith pe mormânt, alături de spirala-lui Arhimede:

Jacob Bernoulli, matematicianul incomparabil. Profesor la Universitatea din Basel. De mai bine de 18 ani, membru al Academiilor Regale din Paris și Berlin; celebru pentru scrierile sale. Datorită unei boli cronice, cu mintea sănătoasă până la capăt; a cedat în anul de har 1705, 16 august, la vârsta de 50 de ani și 7 luni, așteptând învierea. Judith Stupanus, soția sa de 20 de ani, și cei doi copii ai săi au ridicat un monument soțului și tatălui cărora le lipsesc atât de mult.”

Frumos gând și minunată nădejde, exprimate prin vârtejul de vânt-spirala și trei cuvinte, care amintesc de fericita nădejde din Tit 2,13: așteptând fericita noastră nădejde și arătarea slavei marelui nostru Dumnezeu și Mântuitor Isus Hristos.

Puțină istorie-familia Bernoulli

o istorie impresionanta, de familie unica în istoria civilizației-a dat omenirii zeci de savanți, 8 dintre ei celebrii, care au dominat lumea științei un veac și jumătate(1650-1800)



Familia Bernoulli, Deschiderea festivă a Universității- aprilie 1460- Catedrala Basel Munster și gradina Botanică

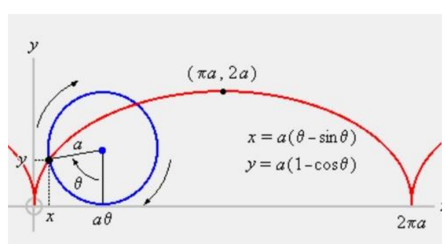
Cum se poate așa ceva? Domnul a dat daruri celor ce se tem de El. asta este singura explicație. Primul din familie, Nicolaus, s-a refugiat din Antwerp-Țările de Jos-azi Belgia, după masacrul hughenoților din Noaptea Sf. Bartolomeu-1572, când Franța a fost distrusa-spiritual. Catherina de Medici, mama lui Charles IX-regele Franței a orchestrat masacrele reformatorilor protestanți, care au fost în toate marile orașe, începând cu Parisul. Zeci de mii de martiri s-au jertfit, pe altar și Franța a intrat în declin spiritual, care a dus mai târziu, la Revoluție, invenția ghilotinei și eliminarea monarhiei, apoi apariția lenta a socialismului.

Prin anul 1583, tatăl, Nicolaus, a fugit din Antwerp, de frica spaniolilor-catolici, care ocupaseră regiunea. A ajuns la Frankfurt, apoi la Basel în Elveția și a continuat meseria bănoasă de negustor-farmacist. A avut 10 copii și dorea ca aceștia sa continue negustoria, sau sa devina teologi, sau medici. Johann și Jakob au fost primii frați celebrii.

Jakob , sub îndrumarea părinților, a studiat filosofia (1671) și teologia (1676) și în secret, împotriva voii părinților, a învățat privat matematica și astronomia. Până la 28 de ani a călătorit în toata Europa, vizitând pe toți marii savanți și matematicieni. S-a întors la Universitatea din Basel-1683 și a început sa predea matematica, relaționată la lichide și solide. Având și titlul de teolog, a avut multe oferte de la biserici, dar le-a refuzat pe toate. În 1684 s-a însurat cu Judith Stupanus, cu care a avut 2 copii. A continuat corespondenta cu Leibniz și era fascinat de opera lui Descartes.

A găsit limita șirului $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ca fiind intre 2 și 3, mai precis 2,718 și a calculat suma totala de dobândă compusă, aplicata pe an, luna, săptămâna și ora, ca fiind limita aceluiași sir, care este baza logaritmilor naturali, pe care Euler l-a definit în ecuația sa celebră

$$e^{i\pi}+1=0$$



În 1691 a publicat, ca o provocare la competiție, problema lanțului-catenaris, în renumita revista din Leipzig, Acta Eruditorum , un jurnal științific, fondat de Otto Menke, cu suportul lui Leibniz. Au răspuns, cu găsirea ecuației celebre, 3 savanți de renume, Christian Huygens, din Olanda, Gottfried Leibniz, din Hanovra și Johann, fratele lui Jakob. Aceasta ecuatie ascunde în ea logosul, proporția de aur, despre care vom vorbi separat. A studiat în profunzime calculul statistic și a fost pionierul teoriei probabilităților. Acestea s-au publicat postum în 1713 în jurnalul Ars Cojecturandis-Arta Combinațiilor. A murit de tuberculoza la 50 de ani și a lăsat o mărturie frumoasa familiei care l-a plâns îndelung și și-au scris regretul pe piatra de mormânt, cu speranța vie ca se vor întâlni la Răpire (Eadem Mutato Resurgo).

Johann (1667-1740), mai mic cu 12 ani, s-a născut la Basel, fiind al 10 lea copil al lui Nicolaus și Margareta Bernoulli. Urmând sfaturile tatălui, a ales medicina, insa fratele sau mai mare, Jakob l-a învățat matematica. Cei 2 au început împreuna sa dezvolte calculul diferențial, preluat de recentele descoperiri ale lui Leibniz și Newton. A terminat medicina în 1694, dar contrar așteptărilor, a publicat 2 cârti de calcul diferențial.

S-a însurat în 1694 cu Dorothea Falkner, cu care a avut 3 băieți, printre care și Daniel, prietenul lui Euler. A devenit profesor de matematica la Universitatea din Groningen, Olanda. Aici a fost fericit și a adoptat dictonul *Patria est, ubi bene est* (patria este unde este bine) preluat de la romani-Marcus Pacuvius (200 B.C) și apoi de Cicero (106 B.C). I-a avut elevi pe marchizul de L|`Hospital şi pe Leonard Euler, la Basel. L|`Hospital, desi semnase un contract înainte, i-a preluat cunoştintele profesorului sau și le-a publicat ca personale. Aşa se face ca azi folosim la Analiza regula lui L|`Hospital la calculul limitelor de excepţie, dar de fapt sunt inventate de Johann.

A calculat ecuaţia cicloidei (traiectoria unui punct de pe un cerc care se roteşte pe o dreapta cu viteza constanta). După moartea fratelui sau, a preluat catedra de matematica la Universitatea din Basel. Ambii fraţi l-au sprijinit pe Leibniz în procesul împotriva lui Newton, de iniţiatori ai calculului integral și diferenţial; a fost gelos și ranchiunos, atât pe fratele mai mare-Jokob, dar și pe fiul său Daniel, care a câştigat numeroase premii. L-a acuzat ca i-a furat ideile și a întrerupt orice relaţie cu el până a murit.

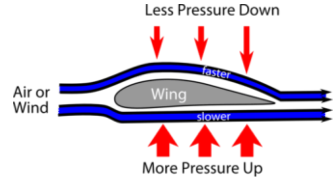
A fost o mărturie neplăcută în familia celebră, cu părinţi creştini, model. Se vede că firea omului, în condiţii de neveghere aduce pagube și acestea aduc necazuri, care merg la moarte-în veşnicie.

Generația a 2 a:

Johann II

Nicolaus II

Daniel



Johann II, a fost un matematician de frunte, profesor și a murit de febra la 31 de ani.
Nicolaus II a fost matematician și fizician.

Daniel (1700-1782) s-a născut la Groningen, Olanda unde tatăl sau era profesor la Universitate. Ca și înaintașii, neascultând de tata, sa se facă negustor, a urmat medicina, cu speranța ca tatăl sau, Johann îl va învăța matematica. În 1721 Daniel și-a luat doctoratul în medicina și botanica. După cum am mai spus, tatăl sau era o persoană geloasa și ținea supărările. S-a întâmplat la concursul din Paris, când el și tatăl au fost egali câștigători. Tatăl a publicat Hidraulica iar fiul Hidrodinamica. Ca mânie și neiertare, din partea tatălui, Daniel a fost alungat de acasă și necazul a rămas nerezolvat până la moartea tatălui-Johann.

Daniel a fost prieten cu Leonard Euler și i-a fost profesor. În 1724 Daniel a plecat (171725-1733) în Rusia la invitația țarinei Ecaterina, văduva lui Petru cel Mare. Aici n-a stat mult, dar l-a chemat și pe Euler, care s-a mutat cu toata familia (a avut 13 copii). A studiat astronomia, psihologia, teoria gazelor, hidrodinamica (aceasta conține legea curgerii fluidelor-principiul aripii flotante pentru zborul avioanelor). Efectul Bernoulli arata ca atunci cand un fluid curge cu viteza crescândă, presiunea scade. Acest principiu l-a descris matematic și are multiple aplicații practice. Asta arata, ca pe aripa avionului aerul curge cu viteza mai mare pe partea de deasupra, decât pe cea de dedesubt. Forma aripii ajuta avionul sa se ridice.

Generația a 3 a:


Johann III


Jacob II

Johann III a fost fiul lui Johann II și a fost un copil precoce. Și-a luat titlul de astronom regal la Berlin, la 19 ani. A călătorit mult și a fost numit șeful catedrei de matematica al Academiei din Berlin.

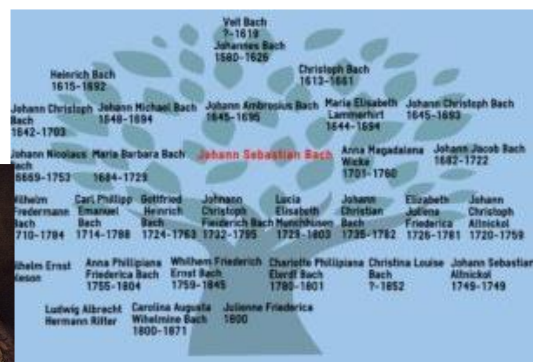
Jakob II a fost printre ultimii; a fost fizician și matematician, membru al Academiei din St. Petersburg și a murit înecat la 29 de ani-1789

Cristoph (1782-1863) încheie plutonul savanților și a fost profesor la Basel și Halle.

Am văzut sumar ce aduce o familie, care a avut părinții temători de Domnul, care a pornit de la început cu frica și teama de El, s-a încrezut în promisiunile divine și au ascultat de El din dragoste. Familia Bernoulli a avut și scăderi, certuri și neînțelegeri, dar a lăsat omenirii o moștenire uriașa, care nu se poate măsura. Folosul omenirii, ca urmare a descoperirilor în știință și matematica sunt uriașe, nicio generație nu a mai dat asemenea valori.

Domnul l-a binecuvântat pe Avraam și i-a spus*: Uita-te spre cer și numără stelele, daca poti sa le numeri...Așa va fi sămânța ta* (Gen.15,5). La fel peste milenii, aceasta promisiune se revarsă mereu peste familiile care se tem de El și îl recunosc ca Domn și mântuitor. Bernoulli, Newton, Leibniz, Pascal, Euler, Gauss și lista continua-sunt doar câteva imagini de revărsare a harului divin peste cei iubiți de El și peste urmașii lor. Ce ar fi făcut omenirea, fără curgerea harului asupra celor aleși de El? nu mai zburau avioane, nu mai aveam lumina în case, nu mai mergeau mașinile și rămâneam în urma, ca în timpul evului mediu, care a rămas în istorie ca vremea de întuneric...

Dacă prin Bernoulli, harul divin s-a revărsat din belșug în știință și matematica, atunci, tot în tarile germane harul s-a aplecat către arte și muzică. Familia **Bach** a dominat scena muzicală și rămâne în istorie cu capodopere care merg în veșnicie. Concertele-brandemburgice, sonatele și fugile lui Bach și a urmașilor lui, sunt încă o dovada ca Domnul revarsă binecuvântarea din neam în neam. Familia Bach a dat peste 25 de muzicieni și componiști pe o perioadă de 2 secole. Cine a mai excelat la orga în măreția catedralelor gotice, cine a mai înălțat așa sublime osanale și sonate, ca laude Domnului? Bach a avut 19 copii și la fel ca Bernoulli a pornit smerit, cu frică și dragoste și a călcat pe căile pregătite de El încă din veșnicii.

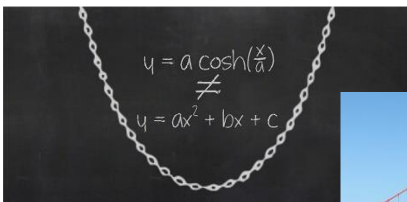


Wilhelm Friedemann Bach (1710–1784) - Bach din Dresda și Halle –(componist şi organist de baroc târziu); **Carl Philipp Emanuel Bach** (1714–1788) - Bach din Berlin și Hamburg (cel mai renumit urmaș al lui Bach-componist de muzica bisericească-evanghelică) **Johann Christoph Friedrich Bach** (1732–1795) –Bach din Bückeburg (musician și componist); **Johann Christian Bach** (1735–1782) - Bach din Milano și Londra (a fost un geniu muzical și l-a influențat pe tânărul Mozart). Adevărat este Cuvântul divin: Mă îndur până la al miilea neam de cei ce Mă iubesc și păzesc poruncile Mele. (Deut. 5,10 și Ier. 32,18)

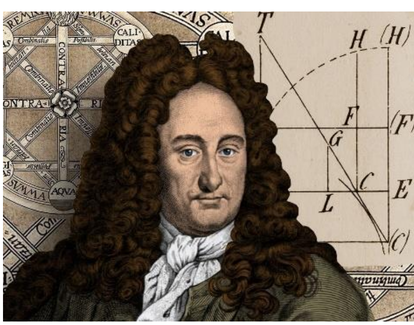
Ecuația lanțului-catenaris

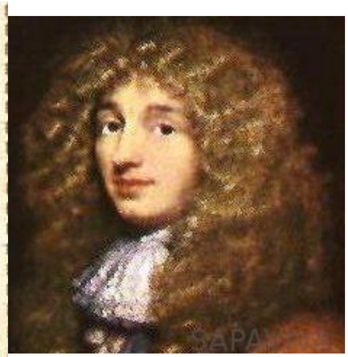
Dar adu-ți aminte de Făcătorul tău, în zilele tinereții tale, până nu vin zilele cele rele și până nu se apropie anii când vei zice: nu găsesc nicio plăcere în ei....Până nu se rupe funia de argint, până nu se sfarmă vasul de aur ...(Ecl. 12,1-6)

Înțeleptul Solomon se gândea la trecerea timpului și la faptul ca omul este trecător, ca viața lui e ca firul de iarbă, trecătoare și fragilă. Funia de argint ne duce la praful de pe cumpănă, la omul, care azi e și mâine nu mai e. Ce este mai subțire ca firul de păianjen, care se găsește totuși în casele împăraților? (Prov. 30,27)



Problema ecuației a fost supusa de Jakob Bernoulli în 1691 în jurnalul din Leipzig, *Acta Eruditorum*-Registrul erudiților.





Gottfried Wilhelm Leibniz, Johann-fratele lui Jakob și Christian Huygens, din Olanda au dat un răspuns corect și au adus diferite soluții la provocarea din revista germana.

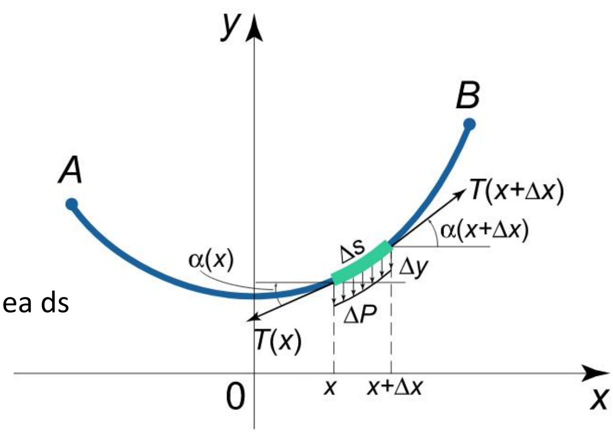
Galilei, care a construit telescopul ca și Jakob, credeau că lanțul are o ecuație parabolică...

Ce este mai simplu decât un lanț suspendat în 2 puncte, sau o sfoara ținută în mână? O sa vedem, ca aceasta simplitate, ascunde în ea o proporție divină, un logos care apare mereu, mereu în jurul nostru.

Sa încercăm sa deducem ecuația lanțului, suspendat de punctele A și B

pentru diferențe mici, avem creșteri infinitezimale de la T(x) la T(x+dx)

T este tensiunea în fir -forța care se opune solicitării-întinderii unui fir. În stare liberă, în orice punct avem echilibru: -T+T=0



T(x) crește la T(x+dx)

panta: α(x) crește la α(x+dx)

ds este creșterea firului de la x la x+dx

dP = creșterea greutății pe lungimea ds

G=mg=ρVg=ρAdsg-A este aria pe lungimea ds

dP= ρAgds

scriem echilibrul forțelor:

$\sum F(x) = 0$: -T(x)cosα(x)+T(x+dx) cosα(x+dx)=0

$\sum F(y) = 0$: -T(x)sinα(x)+T(x+dx) sinα(x+dx)-dP=0

din prima ecuație, diferența de la x la (x+dx) a funcției T(x)cosα(x), arată ca derivata ei este nulă, deci funcția este constantă, adică: T(x)cosα(x)=T=constant

din a 2 a ecuație, diferența de la x la (x+dx) a funcției T(x)sinα(x) este $d\lfloor(\mathrm{T(x)sin\alpha(x)})\rfloor$

deci: $d\lfloor(\mathrm{T(x)sin\alpha(x)})\rfloor$=dP, derivăm: $\mathrm{T(x)cos\alpha(x)}$ =dP(x), dar: $\mathrm{T(x)}=\frac{T}{\cos\alpha(x)}$

deci: $\mathrm{d}\left\lfloor \frac{T}{\cos\alpha(\mathrm{x})}\sin\alpha(\mathrm{x})\right\rfloor=\mathrm{dP(x)}$ sau: $\mathrm{d}\lfloor tg\alpha(x)\rfloor = \mathrm{dP(x)}$ dar: $tg\alpha(x) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{y}'$

deci: $\mathrm{T\ d}(\frac{dy}{dx})=\mathrm{dP(x)}$ sau: $\mathrm{T\ d(y')} = \mathrm{dP(x)}$ sau: $\mathbf{T(y)''} = \mathbf{dP(x)}$ (1)

dar: $\mathrm{ds}^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (Pitagora) $\mathrm{ds}=\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}=\mathrm{dx}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$

$dP(x) = \rho A g\, dx \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ (1) devine: $T(y)'' = \rho A g\, dx\sqrt{1+(y')^2}$

$T\, d(\frac{dy}{dx}) = \rho A g\, dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ notăm: $\frac{dy}{dx} = y' = z$ deci: $T dz = \rho A g\, dx\sqrt{1+z^2}$

$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \left(\frac{\rho A g}{T}\right) dx$ integrăm: $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \left(\frac{\rho A g}{T}\right) dx$ avem:

$\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = \frac{x}{a} + C$ unde: $a = \frac{T}{\rho A g}$

pentru $x=0$, $\frac{dy}{dx} = y' = z = 0$ deci: $C=0$

$\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = \frac{x}{a}$ devine: $z+\sqrt{1+z^2} = e^{\frac{x}{a}}$ (2)

$(z+\sqrt{1+z^2})(z-\sqrt{1+z^2}) = e^{\frac{x}{a}}(z-\sqrt{1+z^2})$

$z^2-(1+z^2) = e^{\frac{x}{a}}(z+\sqrt{1+z^2})$ $-1 = e^{\frac{x}{a}}(z-\sqrt{1+z^2})$ sau:

$(z-\sqrt{1+z^2}) = -e^{\frac{-x}{a}}$ (3)

$(z+\sqrt{1+z^2}) = e^{\frac{x}{a}}$ (2) adunăm:

$2z = e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}$ $z = \frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}}{2} = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{a}$ $dy = dx \sinh\frac{x}{a}$

integrăm: $\int dy = \int dx \sinh\frac{x}{a}$ deci:: $\boldsymbol{a\cosh\frac{x}{a} = y}$

$\boldsymbol{y = a\frac{(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}})}{2}}$ notăm: $\frac{1}{a} = b$ $\boldsymbol{y = \frac{(e^{bx}+e^{-bx})}{2b}}$

$b = \frac{\rho A g}{T}$ $\cosh\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}}{2}$ $\sinh\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}}{2}$

$$\boldsymbol{y} = \frac{(\boldsymbol{e^{ax}}+\boldsymbol{e^{-ax}})}{\boldsymbol{2a}} = \frac{1}{\mathrm{a}}\cosh(\mathrm{ax}) \qquad \text{unde: } \mathrm{a} = \frac{T}{\rho\mathrm{Ag}}$$

Am pornit de la un element de fir ds= $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ și de la un element de masă

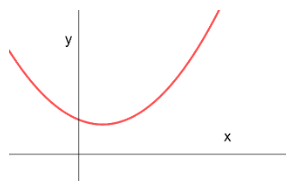
dP= ρAgds și ajungem la o ecuație exponențială de forma:

$$\boldsymbol{y} = \frac{(\boldsymbol{e^{ax}}+\boldsymbol{e^{-ax}})}{\boldsymbol{2a}} \qquad \text{unde: } \mathrm{a} = \frac{T}{\rho\mathrm{Ag}}$$

T este tensiunea orizontala la punctul cel mai jos; ρeste densitatea firului; A-aria secțiunii

Așa cum am mai spus, aceasta ecuație, arata forma pe care o ia un lanț, sau o funie suspendata din 2 puncte, și care este liberă, numai sub efectul gravitației.

Iată cum a ajuns Johann Bernoulli la aceeași ecuație:



A considerat ca exista aceeași panta $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$

Cunoaștem panta și dorim sa aflam ecuația curbei

ds= $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ (Pitagora pe un segment mic)

$$(\mathrm{ds})^2 = (\mathrm{dx})^2 + (\mathrm{dy})^2 = (\mathrm{dx})^2 + \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{s}^2}(\mathrm{dx})^2$$

$$\mathrm{dx} = \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

Bernoulli a observat ca $\frac{s\,ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$ este diferențială pentru $\sqrt{s^2 + a^2} - \mathrm{a}$

Aplicam integrala $\int \mathrm{dx} = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$ avem: x= $\sqrt{s^2 + a^2} - \mathrm{a}$ sau : s=$\sqrt{2ax + x^2}$

Deci: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$ devine: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{2ax+x^2}}$ vedem ca apar numai x și y

Se mai scrie: $f'(x) = \frac{a}{\sqrt{2ax+x^2}}$

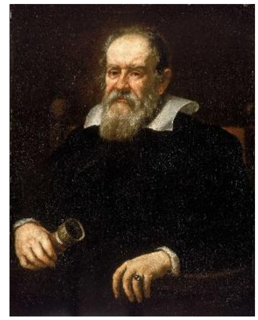
deci f(x)= $\int_0^x \frac{adt}{\sqrt{2at+t^2}} = aln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$ −a lna

de unde: y=$\int_0^x \frac{adt}{\sqrt{2at+t^2}} = a\ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ −a lna

y=$aln(\sqrt{2ax+x^2})$ −a lna

de unde: $$\mathbf{x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}}+e^{-\frac{y}{a}}\right)-a}$$

Johann, care a dezlegat problema, scria în 1718:

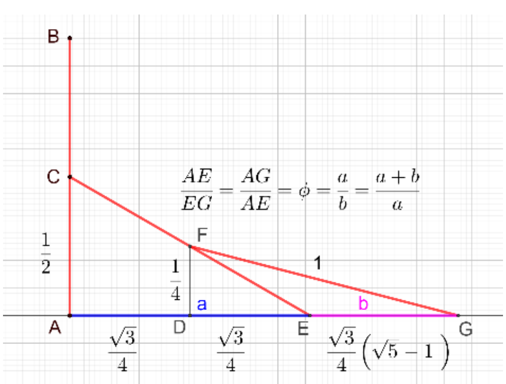


Galileo Galilei (1564-1642)

Toate eforturile fratelui meu(Jakob) au fost fără succes. Din partea mea, am fost mai norocos, caci am găsit metoda (spun fără sa mă laud; de ce as ascunde adevărul?) să rezolv asta în totalitate...este adevărat, caci asta m-a costat sa studiez și mi-a răpit restul nopții. A fost o mare realizare pentru acele zile, pentru tinerețea și experiența pe care am avut-o. A 2a zi dimineața, plin de bucurie am alergat la fratele meu, care se tot lupta mizerabil cu nodul gordian, fără sa ajungă nicăieri, gândind ca și ***Galilei****, că lanțul este o parabolă. Stop, stop! I-am spus, nu te mai chinui singur căutând sa dovedești că lanțul este o parabolă, pentru că este total fals.*

Legătura dintre ecuația lanțului și numărul de aur

Având găsită ecuația lanțului sub forma exponențială-cosinus hiperbolic, să vedem ce ascunde ecuația, întrucât apare evident funcția e^x, funcția găsită la început la ecuația spiralei logaritmice-spira mirabilis.

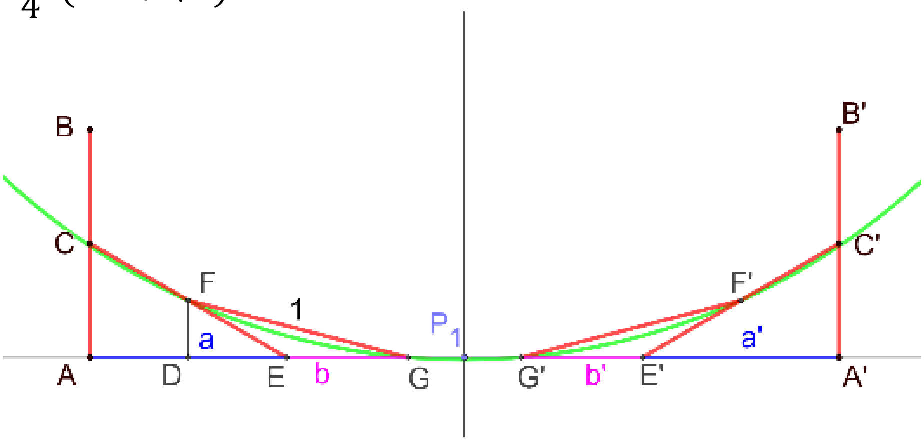


Consideram 3 segmente egale, ca 3 zale de lanț, care stau suspendate sub gravitație:

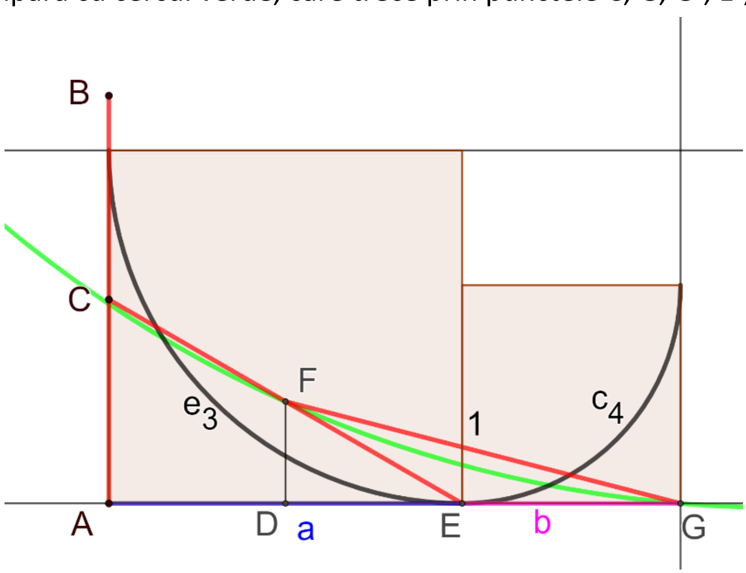
AB-vertical, CE se sprijină pe mijlocul lui AB în C. din mijlocul lui CE, din F, se sprijină al 3 lea segment FG. Facem analogie cu 3 zale de lanț, care se pot lua ca 3 segmente egale și le dispunem sub forma din schița de mai sus. În orice moment, putem trasa un sistem de axe perpendiculare, pe care am proiectat cele 3 segmente egale. Se obțin pe abscisă punctele A, E și G. punctele A, E și G sunt în raport de aur.

Luam AB=CE=FG=1 și prin Pitagora obținem raportul-logos $\frac{AE}{EC}=\frac{AG}{AE}=\emptyset$

$$\frac{AE}{EG}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}(-1+\sqrt{5})}=\frac{2}{(-1+\sqrt{5})}=\emptyset$$



Luăm simetricul configurației AB,CE, FG și obținem mai sus o aproximație a lanțului, care se poate compara cu cercul verde, care trece prin punctele C, G, G´, E´,C´



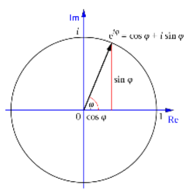
Pe raportul $\frac{AE}{EC}=\frac{AG}{AE}=\emptyset=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ am construit dreptunghiul de aur cu cele 2 pătrate pe mărimile a și b, ca în geometria de la început și am trasat cele 2 cercuri, care definesc parțial spirala logaritmică-**spira mirabilis.** La dimensiuni infinitezimale, cele 2 curbe-cercul verde și spirala se contopesc și ascund în ele proporția de aur-logosul $\emptyset$, pe care l-am găsit mereu.

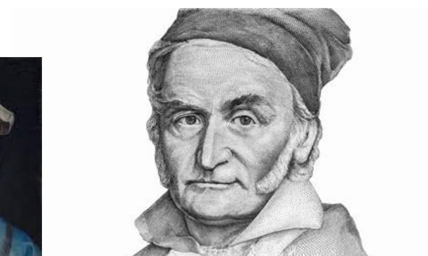
De ce am calculat ecuația lanțului? De ce am calculat ecuația spiralei logaritmice?

Iată 2 întrebări, care necesita un răspuns și o concluzie. Ambele au ecuații, ca forma exponențială, unde apare numărul e, descoperit de frații Bernoulli dar definitiv introdus ca simbol și definiție de Leonard Euler, despre care vom vorbi mai târziu.

r=c$\boldsymbol{e^{\theta ctg\beta}}$

$$\boldsymbol{y=\frac{(e^{ax}+e^{-ax})}{2a}}$$



(planul complex, ecuația lui Euler și Gauss)

Prima ecuație este spirala logaritmica-sub forma polară, iar a 2 este ecuația lanțului sub forma carteziană y=f(x). la dimensiuni de microni, aceste curbe se suprapun.

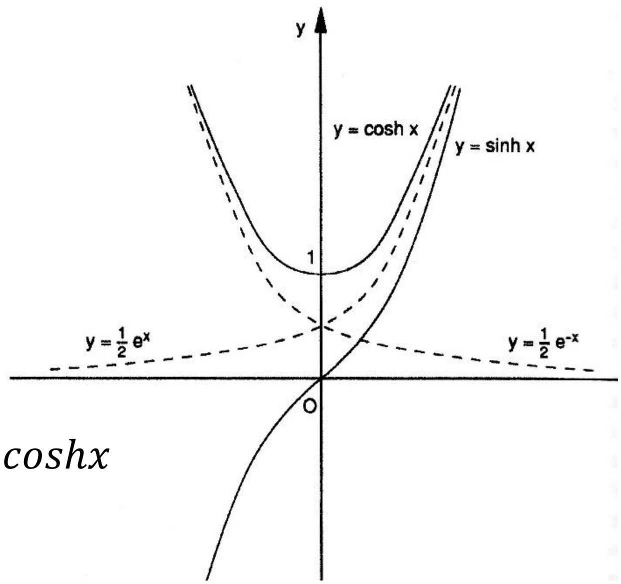
În ambele ecuații apare e-baza logaritmilor naturali și ambele ascund raportul-logos de aur așa cum am văzut mai sus. Deci, deși invizibila, legătura dintre **e** și $\emptyset$ se ascunde, la nivel infinitezimal, de limită, când 3 zale de lanț se pot aproxima cu 3 segmente egale suspendate în aer, dar care se sprijină unul pe altul la jumătăți. Desigur, la prima vedere, pare o speculație, dar vom vedea mai târziu, ca logosul proporție, definește și derivata și singura funcție care nu-și schimba derivata este cea exponențială e^{x}**.** Vom face incursiuni mai adânci la planul complex și la numerele imaginare, care au fost definite tot de Euler. Funcția e^{z} în planul complex și pe cercul trigonometric definește un poligon regulat cu n dimensiuni. Gauss a definit ecuația $e^{z}=1$ și a demonstrat în 1796, când avea 19 ani, ca se poate construi cu rigla și compasul poligonul regulat cu 17 laturi.

să mai repetam ecuațiile:

$$y = \frac{(e^{ax}+e^{-ax})}{2a} = a\cosh\frac{x}{a}$$

pentru a=1, avem:

$$y = \frac{(e^{x}+e^{-x})}{2} = \cosh x$$



Să observăm comportarea funcțiilor

dacă se adună $\frac{1}{2}e^{x}$ și $\frac{1}{2}e^{-x}$, obținem $y = \cosh x$

deci ecuația lanțului nu este o parabolă, așa cum au crezut Galilei și Jakob Bernoulli.

cum a apărut funcția exponențială e^{x} și numărul miraculos **e**?

sa mai repetam ecuațiile anterioare:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s} \qquad tg\alpha(x) = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\mathrm{tg}\beta}$$

observăm ca apar 3 rapoarte -în roșu-unde au apărut derivatele dy(y´) și dr(r´), care, dacă integram, obținem funcția logaritmică ln(x), care apoi duce la funcția exponențială e^{x}

am folosit definiția funcției integrale: $\int f(x)' = f(x) + C$

am o sa vorbim mai târziu despre derivata și ce înseamnă pentru funcții, cum se ajunge la studiul funcțiilor, cunoscând derivata-panta tangentei în fiecare punct.

funcțiile hiperbolice sinhx și coshx definite $\sinh x = \frac{(e^{x}-e^{-x})}{2}$ $\qquad \cosh x = \frac{(e^{x}+e^{-x})}{2}$

au proprietăți similare cu funcțiile $sinx$ și $cosx$ și anume:

Pitagora: $sinx^{2} + cosx^{2} = 1$ $\quad sinhx^{2} - coshx^{2} = 1$

Paritate-imparitate: $\cos(-x) = cosx$ $\qquad \cosh(-x) = coshx$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \sin h(-x) = -\sinh(x)$$

adunare: $\cos(x+y) = cosxcosy - sinxsiny$ $/\cos h(x+y) = coshxcoshy + sinhxsinhy$

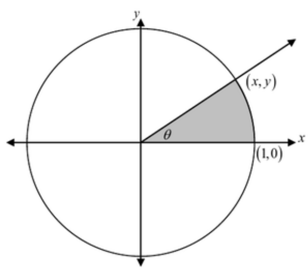
$\sin(x+y) = sinxcosy + sinycosy \quad \sin h(x+y) = sinhxcoshy + sinhxcoshy$

derivate: $\frac{d}{dx}(\,cosx) = -sinx \qquad : \frac{d}{dx}(coshx) = \sinh x$

$\frac{d}{dx}(sinx) = cosx \qquad : \frac{d}{dx}(\sinh x) = coshx$

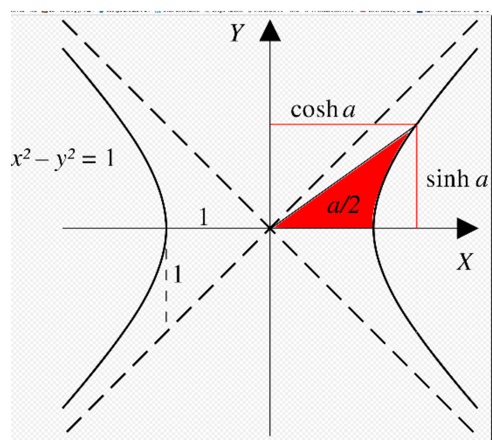
integrale: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = sinh^{-1}x + C$

unde: $sin^{-1}x$ și $sinh^{-1}x$ sunt inversele funcțiilor $sinx$ și $\sinh x$



cercul trigonometric și hiperbola echilateră

$x^2 + y^2 = 1$ și $x^2 - y^2 = 1$



Familia Ricatti (Veneția)

Funcțiile hiperbolice au fost studiate în legătura cu noile descoperiri aduse în calculul infinitezimal de către Newton și Leibniz și apoi de familia Bernoulli (ecuația lanțului).

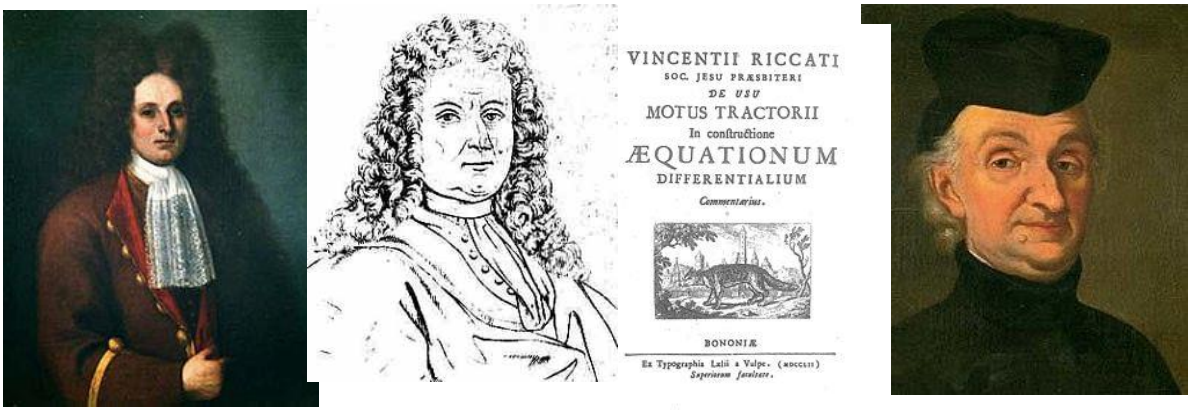
Se vede pe cerc, punctul (x,y) cu coordonatele (x=cos$x$, $sinx$); pe graficul hiperbolei, un punct are coordonatele (x=cosha, $sinha$) unde **a/2** este aria colorată cu roșu.

Ele sunt în strânsă legătura cu cele trigonometrice-din cercul cu raza R=1, după cum se vede mai sus. Aceste asemănări au fost găsite pentru prima dată de către un matematician iezuit **Vincenzo Ricatti** (1707-1775), un savant venețian. El a introdus notațiile, care se păstrează și astăzi. El a publicat studiile sale, în volumul despre ecuații diferențiale *De usu motus tractorii în constructione aequationum differentialium* (1752) (Despre utilizarea mișcării traiectoriilor în construcția ecuațiilor diferențiale). El a predat matematica 30 de ani la Collegio di San Francesco Saverio din Bologna.

Jacopo a fost tatăl lui Vincenzo, a studiat la Universitatea din Padua; a studiat dreptul apoi a scris despre ecuațiile diferențiale de forma $\frac{dy}{dx} = py^2 + qy + r = o.$ A fost invitat de Petru cel Mare sa fie președintele Academiei din St. Petersburg. Alți 2 dintre copiii săi

Jordano (1709-1790) și Francesco, au fost de asemenea matematicieni renumiți, ultimul a studiat geometria în arhitectură.

Vincenzo a văzut asemănarea dintre cerc și hiperbola și dintre ecuațiile lor. El a dezvoltat teoria despre funcțiile hiperbolice, în întregime pornind de la proprietățile hiperbolei



Jacopo, tatăl (1676-1754) și fiii săi Francesco (1718-1791) și Vincenzo Ricatti

Vedem din nou, cum o alta familie-italiana, din Veneția a dat lumii 4 renumiți matematicieni, la fel ca Bach-în muzică și Bernoulli în știință. Dumnezeu, din nou aduce binecuvântări în familiile, care asculta voia Lui, se tem de El și revarsă harul divin peste generații.

Am vorbit mult despre istorie, știință și familii dedicate Domnului care au dus la progresul omenirii în arta și știință. Am pornit de la un raport dintre 2 entități, care definesc logosul-proporția. Din cele două, a și b (a$>b$) avem a treia entitate, suma lor a+b; avem acum 3 entități, în ordinea mărimii lor: **b**$< \boldsymbol{a} < \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a este în mijloc-median și este împărțit armonic intre extremele b și a+b în același raport de aur (medie și extremă rație).

Avem proporția-armonia desăvârșită: $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$, care duce la ecuația:

$\emptyset^2 - \emptyset - 1 = 0$ unde: $\frac{a}{b} = \emptyset$

De aici pornește proporția și dreptunghiul de aur, **spira mirabilis**, funcția exponențială, ecuația lanțului și funcțiile hiperbolice. Vom vedea mai târziu extensia funcției $\boldsymbol{e^z}$în planul complex, ecuația lui Euler, teoria lui Gauss-planul complex și spațiul cu mai multe dimensiuni-și aplicațiile spirituale ale derivatei și integralei, pe care le vom trata separat.

spirala logaritmică în natură

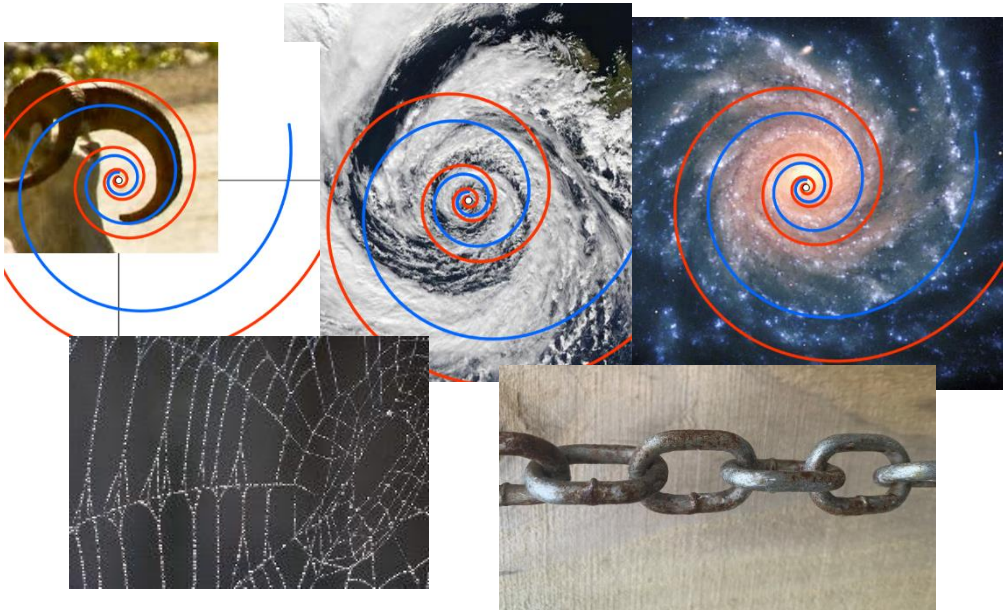
Dacă privim în jur, suntem uimiți de frumusețea și variația formelor și culorilor. De la firul de iarbă, la valuri și nori, flori și plante, până la stele și galaxii putem distinge cu ochiul credinței măreața lucrare modelată cu mâinile minunate ale Domnului. Sa vedem câteva imagini în care se distinge spira mirabilis, pe care am studiat-o geometric, analitic, cu ecuații și mai la urma spiritual. Valurile și norii l-au inspirat pe Van Gogh. El a fost influențat și de arta japonezilor, care desenau valuri și flori de cireș.




floarea soarelui, ferigile, melcii, coarnele berbecilor, cozile cailor de mare, cameleonul și trompa elefanților, aschiile de lemn, conurile de brad până la colacul șerpilor...







Degetul divin își lasă amprenta în cele mai diverse forme, de la pânza păianjenilor, la nori, valuri , vârtejuri, uragane și galaxii. Am văzut cum logosul-proporție-numărul de aur este în ecuația lanțului, a pânzei de păianjen care sfidează gravitația și adie în suflarea vântului am văzut cum suflarea Domnului, când l-a creat pe om, amintește de nașterea din nou; cuvintele de duh spuse lui Nicodim, care venise la Domnul în miez de noapte: *dacă nu se naște cineva din apa și din Duh, nu poate intra în Împărăția lui Dumnezeu. Cine este născut din carne este carne, și cine este născut din Duh este duh. Nu te mira când ti-am spus: Trebuie sa va nașteți din nou. Vântul sufla încotro vrea și-i auzi vuietul; dar nu știi de unde vine. Tot așa este și cu oricine este născut din Duhul.*

Imaginea vântului, care suflă-în grecește: to **pneuma** hopou thelei **pnei;** se vede ca Duhul, sau Spiritul, este **pneuma**, sau vântul care suflă suflare divina, ca în Geneza 2,7. Este vârtejul, care l-a răpit pe Ilie la cer, o spirala de vânt asemănătoare cu uraganele, care ridica case și copaci. Puterea Domnului se manifesta diferit, prin putere care duce la putere, ca în spirala logaritmică.

Spira mirabilis are dublu aspect unul bun și unul rău: merge la infinit daca rotația este pozitiva-CCW și scade la 0, daca se rotește pozitiv-CW-sensul trigonometric-opus acelor ceasului. Așa este și spiritual: vârtejul lui Ilie sfidează gravitația și urcă la cer, ca și tornado în stepele americane, dar te cufunda în adânc, ca vârtejul format la scufundarea vasului Titanic. Cum au căutat primii oameni sa ajungă la cer? Au construit o spirală, un Turn Babel, care pornea de jos cu o baza mare și urca prin rampe circulare, mai mici și mai mici la norii cerului.

Peter Bruegel cel Bătrân (1525-1569)-primele două și Lucas van Vankelborch(1535-1597)

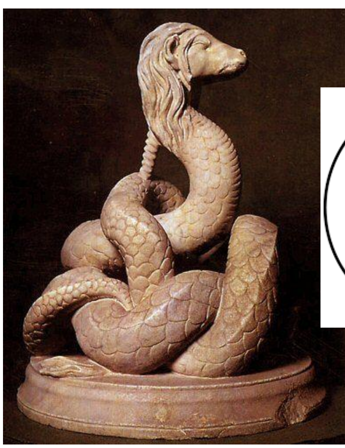
Muzeul de Istorie-Viena și Muzeul Boijmans Van Beuningen-Rptterdam și Louvre-Paris-ultimul

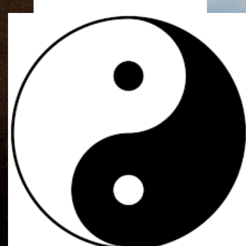
Ei doreau sa ajungă la cer, fără sa realizeze, ca urcând în spirală, pe cărări mai mici și mai înguste , eventual ajungeau la cărarea cea mai mica, adică la 0, acel punct de pornire, dar și de final, depinde în ce direcție ai ales umblarea... Haidem! sa ne zidim o cetate și un turn al cărui vârf sa atingă cerul și sa ne facem un nume, ca sa nu mai fim împrăștiați pe toata fața pământului.

Dualismul bine-rău este și aici, depinde cum privești, cum ai început alergarea și pe ce direcție apuci. Asta tine de alegere, depinde de voința omului, care este liberă să decidă. Pornești bine, alegi binele și pe Domnul și crezi în jertfa de pe cruce, ajungi bine și crești i putere, ca și la spirala noastră. Daca nu, se produce reversul, începi prin forte proprii, sa-ti faci un nume, ai impresia ca progresezi, ca ajungi sa cucerești lumea, dar de fapt te îndrepți pe o cale din ce în ce mai îngusta, care duce la 0, adică moartea spirituala fără Dumnezeu. Văzută invers spira mirabilis în spațiu, poate fi și vârtejul Domnului, care ridica la cer, dar și Turnul Babel, sau șarpele spirala, imaginea râului, sau a Anticristului. Desigur, sunt tot felul de speculații și teme filozofice, care i-au incantat pe oameni și s-au scris tone de cărți. De la filosofia chineza, Yin și Yang, la Zeul șarpe și apoi la Poarta sărutului de Brâncuși, din Târgu Jiu, binele se alipește de rău și imaginile te înșală, daca nu ești atent la șoapta Duhului, care ne învață sa privim Adevărul care este același, Domnul Isus, Fiul lui Dumnezeu. Sărutul lui Brâncuși de pe poarta din piatră poate fi și o balada de dragoste dintre doi iubiți, mire și mireasa, dar și sărutul Domnului pe obrazul lui Iuda, care L-a vândut pe Domnul.

Pentagonul stelat deține în proporții numărul de aur și este minunat, dar întors invers, arata steaua Saturn, la care se închinau păgânii, și mai apoi țapul Bahomet, emblema lui Pitagora, vrăjitorii, cititorii în stele și masonii.

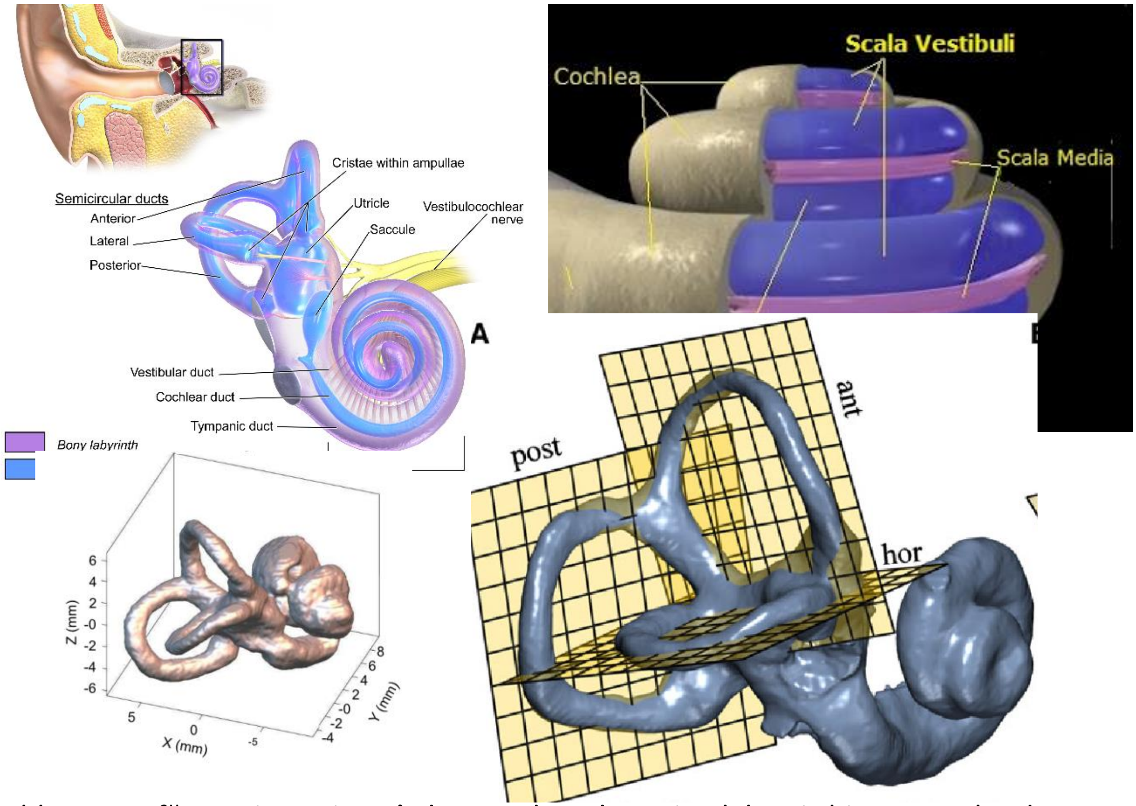
Statuia zeului șarpe-Glycon-Muzeul de istorie Constanța (200 AD) , Yn și Yang și tornado





Pentagonul stelat în picioare și răsturnat- Bahomet și Brâncuși-Poarta Sărutului – Târgu Jiu.

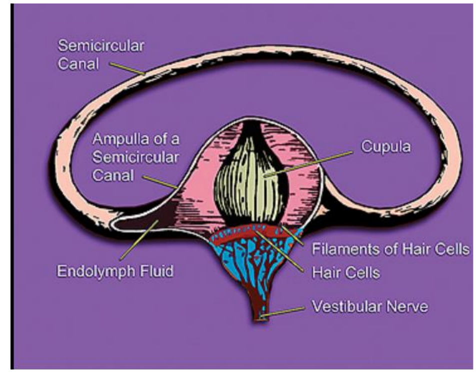
Spira mirabilis și natura omului



Emblema am făcut o incursiune în lumea plantelor animalelor și chiar a astrelor dar n-m observat încă capodopera creației, care este omul. Efeseni 2,10 spune: *Căci noi suntem lucrarea Lui și am fost zidiți în Hristos Isus*-în grecește se spune: *autou gar esmen poiema ktisthentes en christo Iesou*...Lucrarea Lui este în grecește poiema-adică capodopera, poema desăvârșită, care întrece toata creația și depășește toate artele creației.

În imagini avem urechea omului, cu canalul auditiv extern-mediu și intern. Sunetul pătrunde prin pâlnia externă, se amplifica, caci secțiunea se micșorează, trece prin membrana-timpanul care mișcă cele 3 oscioare (ciocanul-nicovala și scărița); scărița vibrează în funcție de sunet și ca un piston apasă diferit lichidul-endolimfa din urechea internă. Aici se află organul de auz-cochilia(cohlea), sau melcul și aparatul vestibular-de echilibru, format din 3 canale semicirculare. Cohlea-spirala logaritmică este o minune, caci preia vibrațiile lichidului din interior și îl transmite diferit la perii (cilii) de pe pereții canalului (membrana bazilară-organul lui Corti). Aceștia vibrează diferit și se încarcă cu electricitate-în funcție schimbul de ioni (potasiu și calciu) din lichidul din interior. Astfel oscilațiile sonore din afară se transformă în curent electric, care prin neuroni se transmit la creier.

aparatul vestibular este legat de cohlea prin 3 coloane semicirculare umplute cu acelasi lichid.



Fiecare semicerc este situat intr-un plan perpendicular și formeaza sistemul 3D, cu care noi oamenii ne naștem și traim. Sistemul cartezian a fost introdus în știință de René Descartes.

Lichidul-endolimfa-conține ioni de potasiu și calciu, care acționează diferit asupra cililor-perii de pe membrana canalului. Aceștia se încarcă sau descarcă cu electricitate și transmit semnalul la creier. Fiecare plan corespunde cu o mobilitate; sunt 6 grade de libertate-3 rotații și 3 translații și fiecare semi-labirint menține echilibrul sau balansul în funcție de mișcarea capului fata de acțiunea gravitației pământului. Acest uimitor mecanism acționează ca o busola, care indica nordul și menține mereu balansul. Nu este uimitor căci cumpăna dreapta a Domnului și măsura Lui este pusa în noi, în urechea noastră și ne menține echilibrul? Am vorbit mai pe larg în capitolul special numit măsura.

Sunetul și scara logaritmică

Am văzut minunea care se petrece în urechea noastră. La fel este cu toate organele de simt. Cele 5 simțuri percep mediul în care trăim, diferit și transmit semnalele mediului la creier. Sunetul vine din afara, trece prin urechea externa și prin cohlea transformă oscilațiile vibrațiile lichidului la cili și mai departe prin impuls electric se duc la neuroni. La fel se petrece și cu vederea omului. Lumina soarelui se reflecta diferit de obiecte și ajunge la pupila și apoi răsturnată imaginea se proiectează pe retina. Exista și aici o proporție-un logos un raport dintre mărimea obiectelor reale și proiecția lor pe ecranul sferic al retinei-conul vizual. Așa se nasc perspectiva și culorile, care au lungimi de unda diferite. Totul este o transformare, o proporție dintre mărimea obiectelor-senzațiilor reale și mărimea impulsului electric care se transmite la creier și se nasc senzațiile ce le avem zilnic. Logosul divin, care este o sclipire a Logosului-Cuvântul din Ioan 1, este peste tot și ne înconjoară, la fel cum spira mirabilis este în pânza de păianjen și în galaxiile nevăzute!

Urechea omului percepe sunete pe o gama larga a intensității: de la 10^{-12} la o mie 1000 $\frac{w}{m^2}$ deci o gama larga de 15 de cate 10 (10^{15}) Intensitatea sunetului se măsoară în $\frac{w}{m^2}$ (este raportul dintre Puterea sunetului-w și suprafața prin care trece sunetul)

$\boldsymbol{I} = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}\left[\frac{w}{m^2}\right]$ Domeniul Intensității sunetului-de auzire al urechii omului este de la $10^{-12}\ \frac{w}{m^2} = \boldsymbol{I_0}$ la $10^3\ \frac{w}{m^2} = I$, deci o gamă largă de 15 zerouri, de la limita inferioara $\boldsymbol{I_0}$ la cea superioară $\boldsymbol{I}$.

Pentru simplificare, ca sa reducem acest domeniu uriaș, s-a folosit logaritmul, invenția introdusa de John Napier în secolul 16. Logaritmii cuprind un domeniu uriaș-infinit, care creste exponențial și sunt ușor de folosit, daca știm proprietățile lor. Aceasta invenție uriașă a simplificat calculațiile lumea științei. În loc sa adun sau sa scad putem înmulți sau împărți, ceea ce este un salt uriaș. Pentru ușurință s-a introdus o alta unitate, **decibelul** (deci=10x bel), o alta unitate de măsura a nivelului intensității sunetului: $\boldsymbol{\beta} = 10log\left(\frac{I}{\boldsymbol{I_0}}\right)$

belul este $\frac{1}{10}\ \beta = log_{10}\left(\frac{I}{\boldsymbol{I_0}}\right)$ unde $\boldsymbol{I}$ și $\boldsymbol{I_0}$ sunt mărimi exprimate prin puterile lui 10

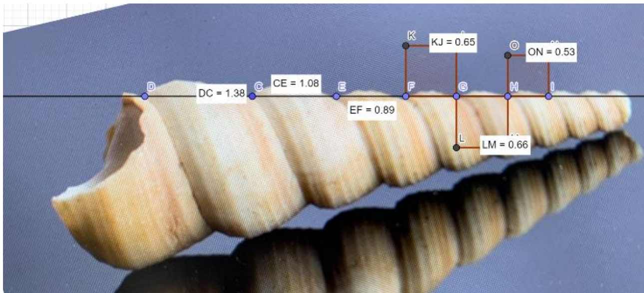
belul s-a introdus ca unitate de măsura a sunetului în onoarea lui Alexander Graham Bell (1847-1922) în anul 1924-Bell a inventat telefonul în martie 1876.

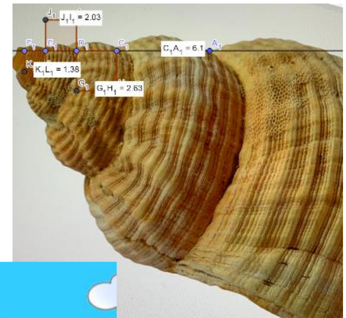
Am văzut câteva proprietăți ale sunetului, care se propaga ca o unda-oscilatorie în spațiu, începând de la o sferă cu raza mica la altele cu raze mai mari și intensitatea **I** este invers proporțională cu pătratul distantei depărtării de la sursă. Desigur nu exista nicio relație intre spira mirabilis și propagarea sunetului, dar ecuația descrisă mai sus include raportul -**logosul** care la fel arata o măsură, o fracție și vedem mereu și mereu, ca alături de fracții, proporții și rapoarte vin mereu aceleași simboluri și concepte matematice: logaritmii, funcția exponențială (inversa logaritmului), numărul **e**, sau mai la urmă minunata ecuație a lui Euler

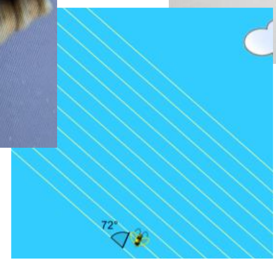
$e^{i\pi} + 1 = 0$ despre care vom vorbi mai târziu.

Spira mirabilis în 3D-ecuația

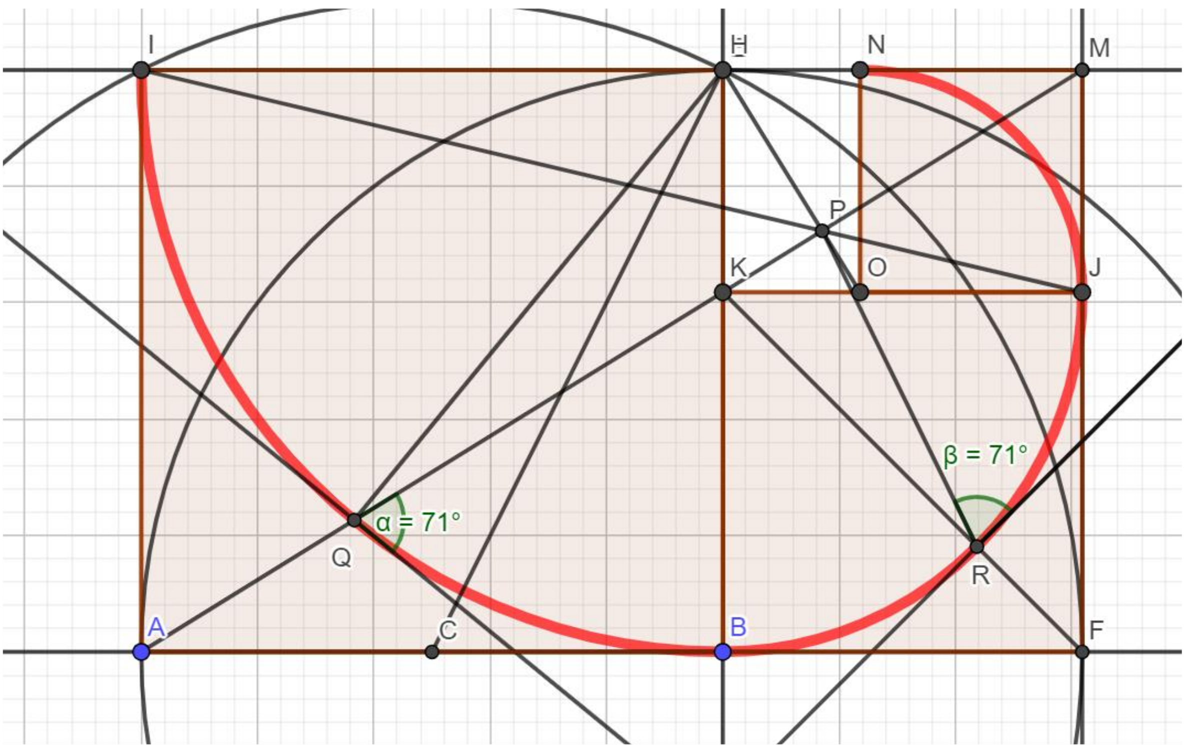
Logosul divin-proporția este pretutindeni în jurul nostru, de la pânza de păianjen, la creșterea plantelor, în coarnele berbecilor și în galaxii. Spira mirabilis, care tine raportul de aur $\emptyset$ =1,618, este în ecuația lanțului și în logaritmi, în cosinusul hiperbolic și în funcția exponențială. Asta nu înseamnă ca este peste tot la fel. Sunt spirale, care au rația diferita, cum am văzut în exemplele de mai sus, au unghiuri de rotație cu creștere diferita, dar cresc exponențial. Nu sunt toate la fel. Au aceeași trăsătură comuna: păstrează același unghi dintre raza vectoare și tangenta la curba, ca și insectele și albinele, care mențin aceeași inclinare, în zbor față de razele soarelui.







Căsuțele melcilor și zborul albinelor



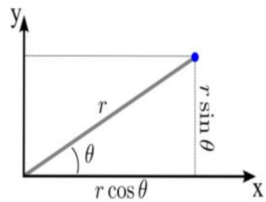
Se observă la spira mirabilis, găsită de Leonardo și Pacioli, în jurul anilor 1500, ca unghiurile α și β sunt de 71° , ca și la zborul albinelor, care poate fi diferit(72°), dar constant în timpul zborului.

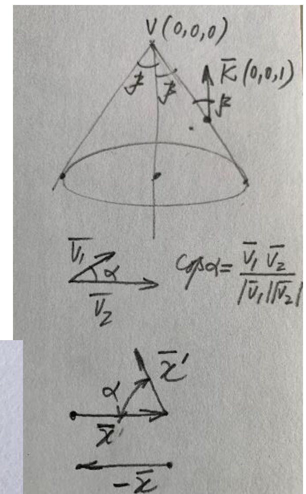
Sa vedem proporțiile la primul melc:$\frac{1,38}{1,08} = 1,27 \frac{1,08}{0,89} = 1,21 \frac{0,89}{0,65} = 1,36 \frac{0,65}{0,66} = 1 \frac{0,66}{0,53} = 1,24$

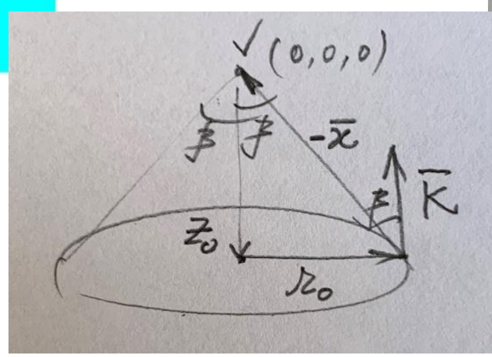
Deci media este 1,21 diferită de 1,618=Ø

la al doilea melc: $\frac{6,1}{2,63} = 2,31 \frac{2,63}{2,03} = 1,29 \frac{2,03}{1,38} = 1,47$

Deci media este 1,69 diferită de 1,618=Ø







Sa consideram o albina-molie care zboară în jurul unei surse-o candela, în planurile orizontale menține un unghi constant fata de tangenta la curba, dar și urcand pe conul cu vârf V(0,0,0), zboară cu un unghi constant fața de axa conului, vectorul $\overline{k}$ unitar cu componentele (0,0,1)

Între vectorii $\overline{k}$ și $\overline{x}$ Sa avem unghiul dintre ei, în plane verticale: -cos β =$\frac{\overline{k}\overline{x}}{|\overline{k}||\overline{x}|}$=$\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$

Deoarece vectorul x pornește din piciorul lui k spre vârf deci opusul sau -x este negativ, iar

$|\overline{k}| = 1$, deci: $\frac{r^2+z^2}{z^2} = \frac{1}{cos\beta^2}$ (1) dar: $tg\beta = \frac{r_0}{z_0} = \frac{r}{z}$ deci: $x^2 + y^2 = z^2 tg\beta^2$

Se vede ca mișcarea este pe un con vertical cu unghiul de vârf 2β și în fiecare plan orizontal pe un cerc cu coordonatele (x,y)

$r = -z(tg\beta)$ (deoarece $z < 0$) deci : $r(t) = -z(t)tg\beta$ derivăm:

$r'(t) = -z'(t)tg\beta$ ținând cont de (1), avem: $(r(t))^2 + (z(t))^2 = (z(t))^2 \frac{1}{cos\beta^2}$

Deci: $(r'(t))^2 + (z'(t))^2 + (r(t))^2 = \frac{(z')^2+z(sin\beta)^2}{(cos\beta)^2}$ în final:

$\frac{z^2}{(z')^2}(sin\beta)^2 = (tg\alpha)^2$ $\frac{(z')}{z} = \frac{sin\beta}{tg\alpha}$ $\frac{dz}{z} = (sin\beta)(ctg\alpha)\mathrm{d}\theta$

$$lnz = -(sin\beta)(ctg\alpha)\theta + C$$

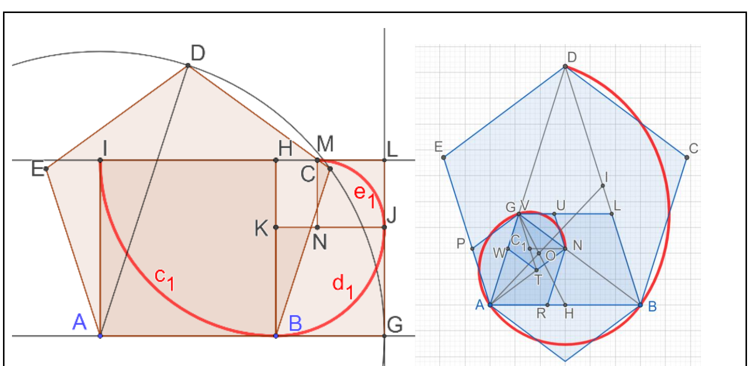
$z = z_0 e^{-(sin\beta ctg\alpha)\theta}$ $r = -ztg\beta = -tg\beta z_0 e^{-(sin\beta ctg\alpha)\theta}$

Dacă rația inițială este: $r_0 = -z_0 tg\beta$ și notăm $(sin\beta)ctg\alpha = m$
avem pe cele 3 coordonate ecuația:

$$x = r\cos\theta = (\cos\theta)r_0 e^{-m\theta}$$

$$y = r\sin\theta = (\sin\theta)r_0 e^{-m\theta}$$

$$z = z_0 e^{-m\theta}$$



Am făcut o incursiune în istorie, începând cu grecii, Pitagora și Euclid, care au construit pentagonul și poliedrele regulate. Fără raportul-logos-de aur Ø =1,618, nu se pot face aceste admirabile construcții geometrice cu rigla și compasul. Avem 5 și $\sqrt{5}$ cu Pitagora și apoi dreptunghiul de aur cu pătratele, care descresc cu aceeași rație Ø., în care se înscriu cercurile spiralei. La fel și la pentagon, cu triunghiurile isoscele cu unghiurile de la vârf de 36° și cele de la baza de 72°. Ele descresc cu aceeași rație, iar cercurile circumscrise definesc spirala. Ambele spirale de aur se exprimă prin ecuații exponențiale **r=c$\boldsymbol{e^{\theta ctg\beta}}$.**

René Descartes a găsit ecuația polară, iar frații Bernoulli au găsit proprietățile remarcabile. Jakob Bernoulli a prețuit-o și a pus-o pe mormânt (Eadem Mutato Resurgo)-i-a găsit înțelesul spiritual, care n-a fost înțeles de nimeni. Euler și Gauss au mers mai departe și au găsit frumusețea numărului e, ecuația celebră $e^{-i\pi} = 1$ și planul complex cu ecuația $e^{z} = 1$.

Concluzii:

Aceasta misterioasa curba este unica în istoria matematicii căci definește 2 proiprietati fundamentale, pe care le găsim în viața noastră zilnica, le găsim în dezvoltarea armonioasă a corpului, a plantelor, a șirului Fibonacci și probabil al universului, creat de Domnul, când a început creația universală. Sunt gânduri îndrăznețe, care depășesc granițele lucrării de față. Cele 2 creșteri-una pas cu pas (aritmetică) și a doua exponențială (geometric), din putere în putere, cum spune Biblia, se regăsesc la tot pasul căci suntem înconjurați de armonie, perfecțiune și măiestrie, de dimineața, când deschidem ochii pe geam, până seara când privim norii și luna și mergem la culcare. *Harmonice mundi*, cum a numit-o Kepler, sau *Armonia Universală* din cartea lui V. Moisescu, sunt de fapt similare și definesc, la fel legea creației universale, pe care Marele Creator, Dumnezeu a folosit-o prin acel *logos*, când a zis și s-a făcut.

Același *logos*, găsit de Napier acum 5 secole, când a creat logaritmii, se găsesc și în proporția numărului-logos arithmos, în hiperbola echilateră, în ecuația lanțului, *catenaria,* sau în firul de păianjen, care adie și tremură la bătaia vintului. Este legea creșterii organice, a trupului, dar și a vieții spirituale, pe care am văzut-o în Biblie. Nu trebuie sa ne surprindă, căci noi suntem ființe divine, create cu un scop și semănam cu Creatorul nostru și dorim să fim ca El, când va veni sa ne ia acasă.

Să ne întoarcem puțin la matematică: am definit geometric forma spirei din construcții diferite, care ambele pornesc de la numărul de aur, cea mai frumoasa măsură, sau proporția de aur, cum au definit-o Leonardo și Pacioli. Ca să îmbinăm legea celor 2 creșteri în limbaj matematic, recurgem la calculul integral, care nu era descoperit până în sec 17. Chiar și ecuația lanțului i-a indus în eroare pe cei mai celebrii savanți ai vremii-Galilei, care nu știau puterea calcului infiniților mici-fluxiunile, cum le-a definit Newton.

Aceste creșteri amintite mai sus se definesc simplu printr-o singura ecuație:

$$\frac{dr}{d\theta} = kr$$

Adică raza creste geometric în timpul rotației pas cu pas

La fel și noi, oamenii și toata creația creste exponențial-geometric, în timp ce timpul trece și creste pas cu pas. Este legea armoniei, a ordinii a frumosului, dar și a disciplinei impusa de precizia matematicii. Aceasta lege le cuprinde pe toate, de la Frumos, la Adevăr, adică doar doua trăsături divine ale Domnului, menționate pe coperta cărții *Scrieri*-2023.

Tu ești cel mai **frumos** dintre oamenii- (Psalm 45.2)

Eu sunt Calea, **Adevărul** și viața (Ioan 14.7)

Sa mergem mai departe cu calcule $\frac{dr}{r} = k d\theta$

integrăm

$$\int \frac{dr}{r} = \int k d\theta$$

avem $\ln(r)=k\theta+C$

$r=e^{k\theta+C}$ $r=e^{k\theta}e^{c}=ae^{k\theta}$

unde:

a =distanța de la origine

k=rata de creștere (derivata)

θ=unghiul de rotație

deci, în câțiva pași cu ajutorul calculului integral, am descoperit ecuația spiralei, atât de admirată de Jakob Bernoulli, căci a pus-o pe mormânt și spera sa se întâlnească cu Domnul la răpirea, care va veni în curând.

Aceasta este istoria fascinantă a acestei spire minunate, de unde provine și misteriosul număr **e**, baza logaritmilor naturali, descoperit tot de Bernoulli, dar definit complet de Euler, care l-a pus în cea mai frumoasa ecuație din istoria matematicii:

$$0 = e^{i\boldsymbol{\pi}} + 1$$